Fraktal geometri (FG).

Vad bryr sig broccoli, ormbunkar och kustlinjer om Euklidisk geometri!

För dem behöver vi ett nytt geometriskt språk.

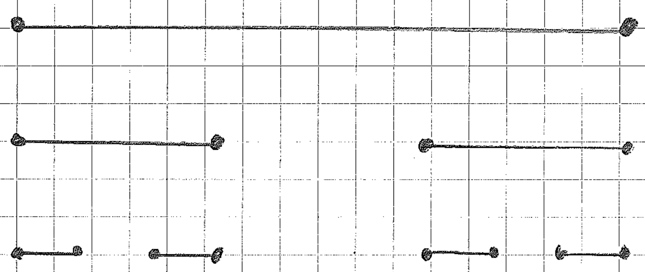
Några exempel på fraktaler:

Cantor mängden

Steg 0

Steg 1

Steg 2

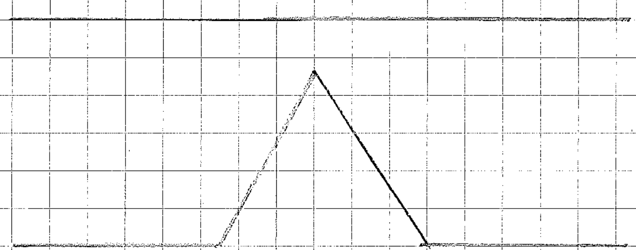


← Lämplig längd 81 mm

Varje segment delas i tre lika delar och så plockar man bort mittdelen. Cantor mängden är den punktmängd som återstår efter oändligt antal repetitioner av denna process.

* Vad blir det kvar egentligen?

Koch kurvan



Steg 0

Steg 1

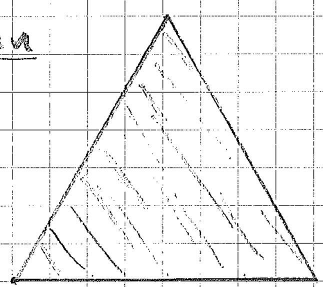
Ta bort mittdelen på varje segment och ersätt den med en liksidig triangel med samma sida som det bortplockade segmentet. Till sist, ta bort basen i triangeln.

Om man utför dessa tre operationer samtidigt på en liksidig triangel så får man Kochs snöflingekurva.

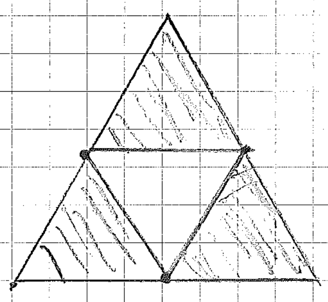
* Vad händer med längd och area för snöflingan då antalet steg $\rightarrow \infty$?

Sierpinski triangeln

Steg 0



Steg 1



Markera mittpunkterna på varje fylld triangel. Förbind dem. Ta bort de nya trianglar som då bildas.

Drakkurvan Starta med en sträcka ____ Kalla den L.

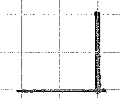
Det finns en R-sträcka också. Reglerna är

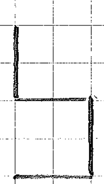
$$L \to L+R+$$

$$R \to -L-R$$

+ står för 90° åt vänster i färdriktningen.
− står för 90° åt höger i färdriktningen

Steg 0  L

Steg 1  L+R+

Steg 2  $L+R\underbrace{++-}L-R+$

$++- = +$

Frakraler uppvisar självupprepning (self-similarity)

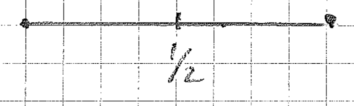
DEFINITION: En mängd S är själv-upprepande om

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \ldots \cup S_k$$

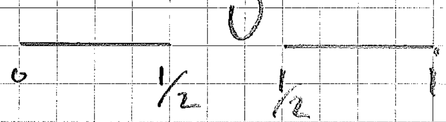
där $S_1, S_2, \ldots, S_k$ ej överlappar och var och en är kongruent med S

Skalad med samma faktor s ($0 < s < 1$).

Exempel:



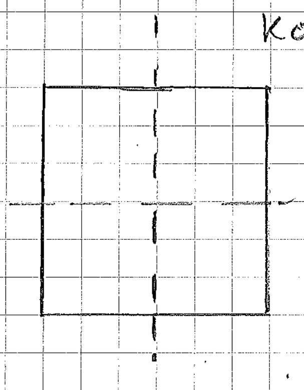
Linjesegment från 0 till 1

= 

$k = 2$ eller $k = 4$ ...

$s = 1/2$ $s = 1/4$

* Cantormängden? Finn k och s!
  Kochkurvan? Finn k och s!



En kvadrat

$k = 4$ och $s = 1/2$

eller

$k = 16$ och $s = 1/4$ ...

* Sierpinski triangeln, finn k och s.

Självupprepningen gör det möjligt att definiera en dimension d för fraktalen.

$$s^d = \frac{1}{k}$$

Halverar vi s så ökar k med en faktor 2^d.

eller efter logaritmering

$$d = \frac{\ln K}{\ln 1/5}$$

För linjesegmentet får vi

$d = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$ och för kvadraten

$d = \frac{\ln 4}{\ln 2} = \frac{\ln 16}{\ln 4} = 2$ precis som

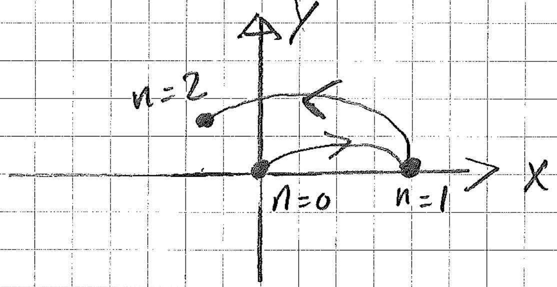
vi förväntar oss. Men vad får vi för dimension på våra fraktaler?

Detta sätt att beräkna dimension ger den s.k. Hausdorff dimensionen. Det finns också en topologisk dimension också och den blir alltid 0, 1, 2, 3, ...

Fraktala objekt dyker ofta upp när man studerar kaotiska dynamiska system.

Ex)
$$X_{n+1} = Y_n + 1 - 1.4 X_n^2$$
$$Y_{n+1} = 0.3 X_n$$

En punkt hoppar till en annan punkt i planet. Starta med $(x_0, y_0) = (0,0)$. Då blir $(x_1, y_1) = (1,0)$ och $(x_2, y_2) = (-0{,}4,\ 0{,}3)$ o.s.v.

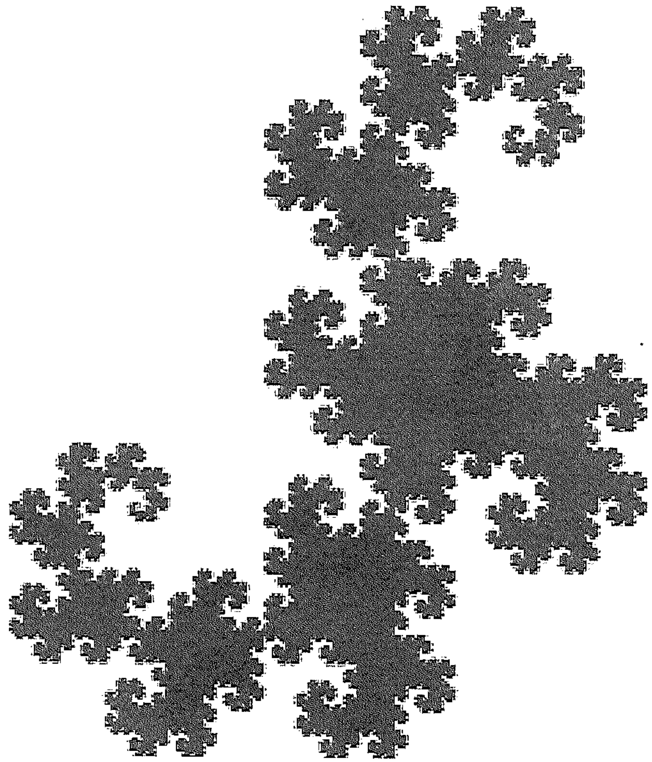


Efter ett tag kommer punkterna närma sig en s.k. säregen attraktor (strange attractor) som är en fraktal.

Mest berömd är Mandelbrot mängden. Den ligger i det komplexa talplanet $\mathbb{C}$.
Man studerar vad som händer med $z_0 = 0$ då

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

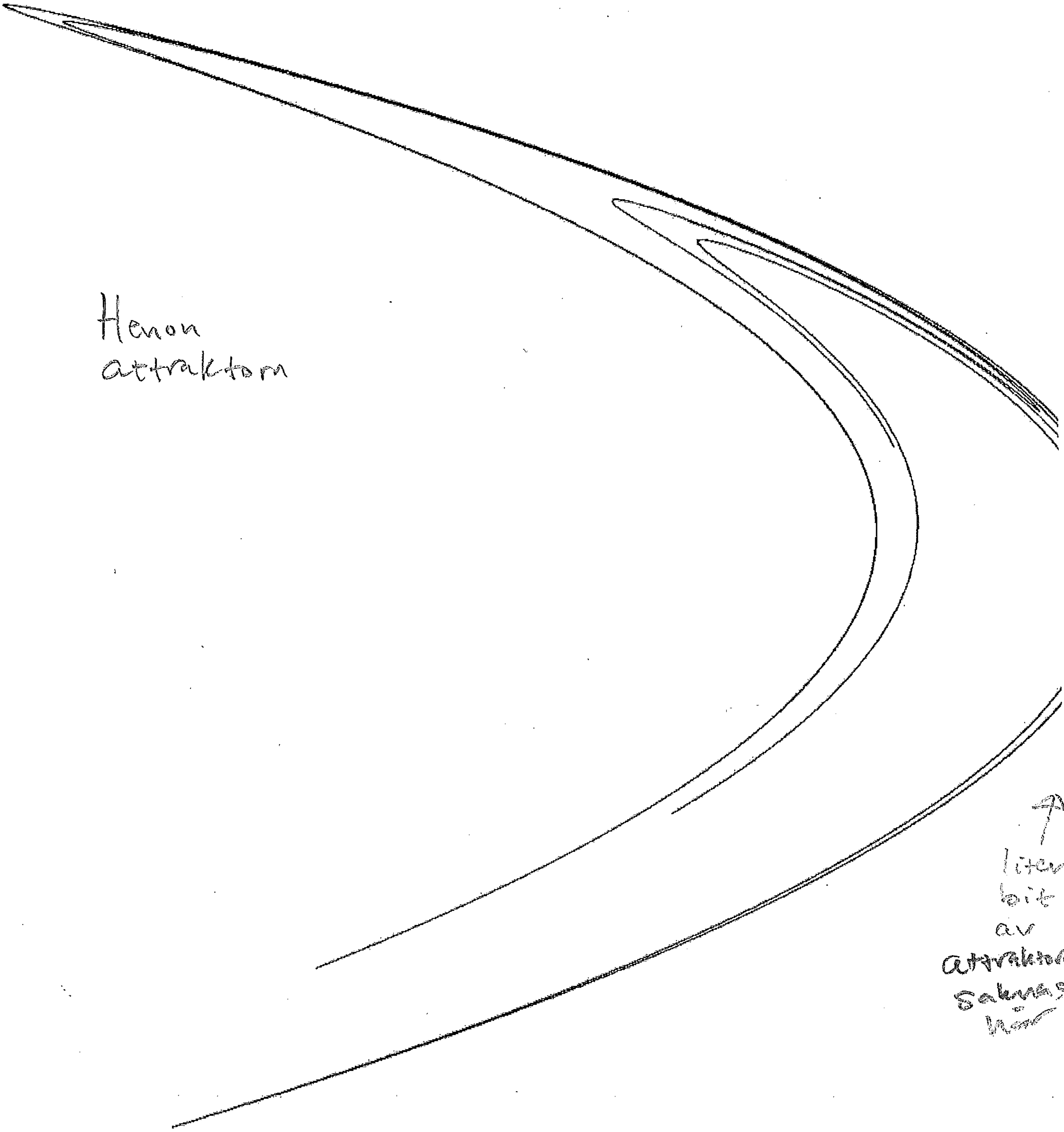
för olika komplexa tal c.
Om för ett givet c iterationerna inte far iväg till oändligheten så skall c vara med i Mandelbrot mängden.



Drakkurva

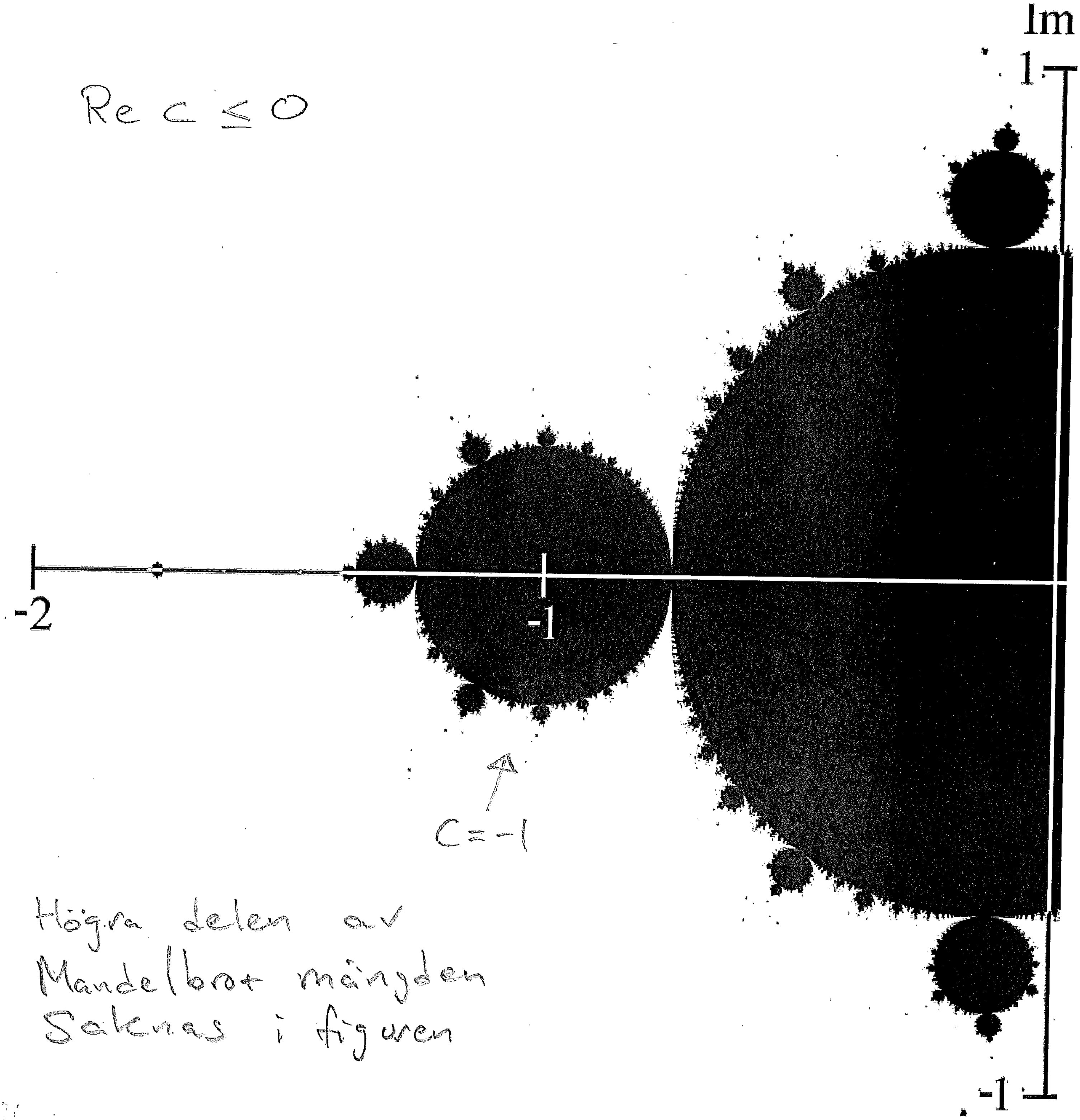
2**17 sidor, Regler: L -> L+R+, R -> -L-R

Henon attraktor



liten
bit
av
attraktorn
saknas
här

$\operatorname{Re} c \leq 0$



Högra delen av Mandelbrot mängden saknas i figuren