Hyperbolisk Geometri (HG)

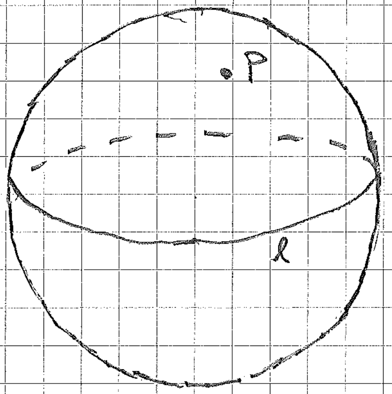
Stol – punkt
Bord – Linje
ölsejdel – Cirkel

Mellan två skilda Stolar finns alltid ett bord!

Till varje Stol och del av ett bord finns alltid en ölsejdel!

Logiskt, eller hur!?

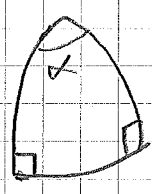
Sfärisk geometri



linje = storcirkel

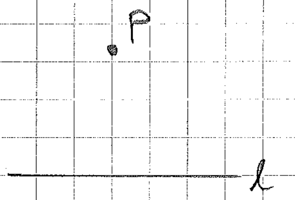
Alla linjer genom P skär l.

Vinkelsumman i en triangel är > 180°.



Arean $= r^2 \cdot \alpha = r^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \pi\right)$

Euklidisk geometri



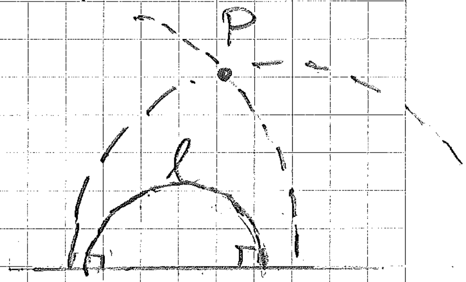
en linje genom P skär inte l.

Vinkelsumman i en triangel är alltid 180 grader.

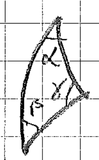
Två trianglar med samma vinklar kan ha olika arcor.

Hyperbolisk geometri

Åtminstone två linjer genom P skär ej l.



Vinkelsumman i en triangel är mindre än 180°.



$A = (\pi - \alpha - \beta - \gamma)$

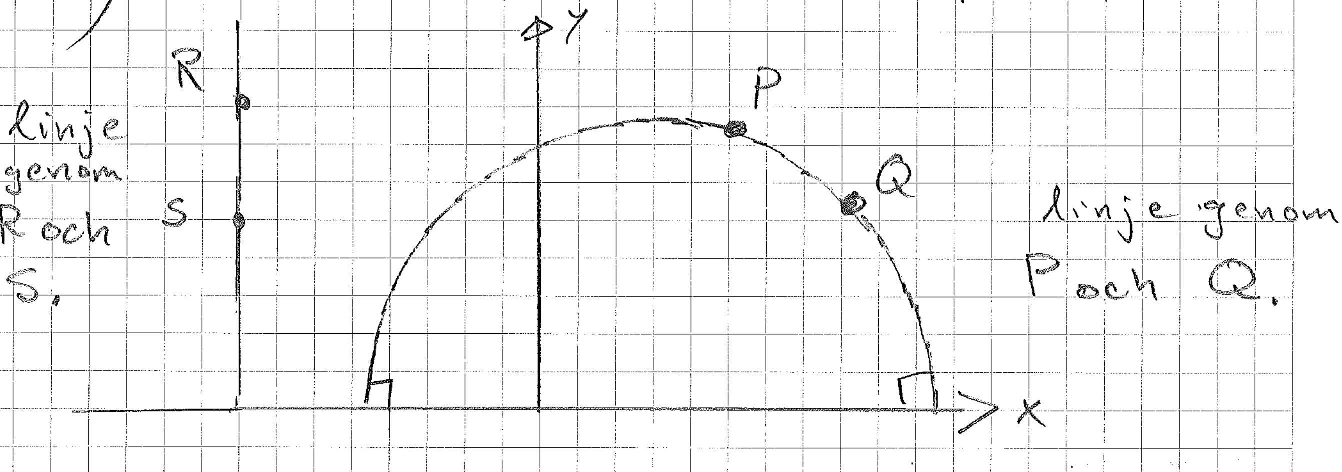
om längdenheten väljs på rätt sätt.

Kom ihåg att Euklides inte använde sitt 5:e postulat förrän i Sats 29. Alltså är en hel del sig likt, kongruens bl. a., men mycket är också annorlunda!

Trevligt att kunna visualisera HG. Vi behöver modeller!

Här kommer tre stycken.

1) Poincarés övre halv-plan.

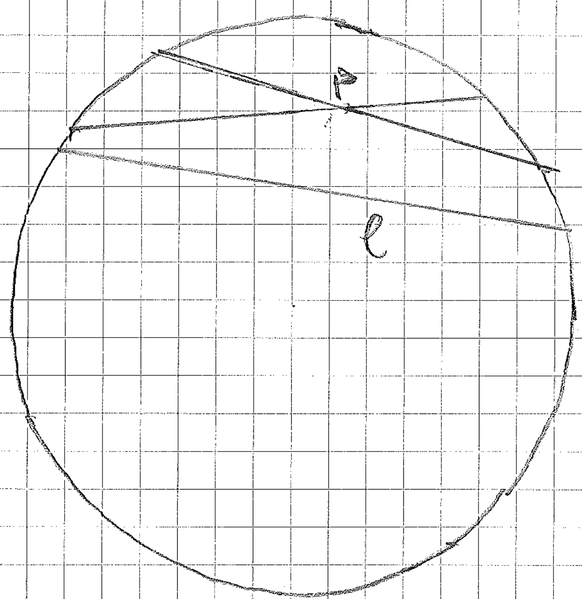


linjer är halvcirklar med medelpunkt på x-axeln eller vertikala linjer.

* Gör problem 1 på utdelat blad.

Ljus i ett medium med brytningsindex $n(y) = 1/y$ rör sig längs cirkelbågar!

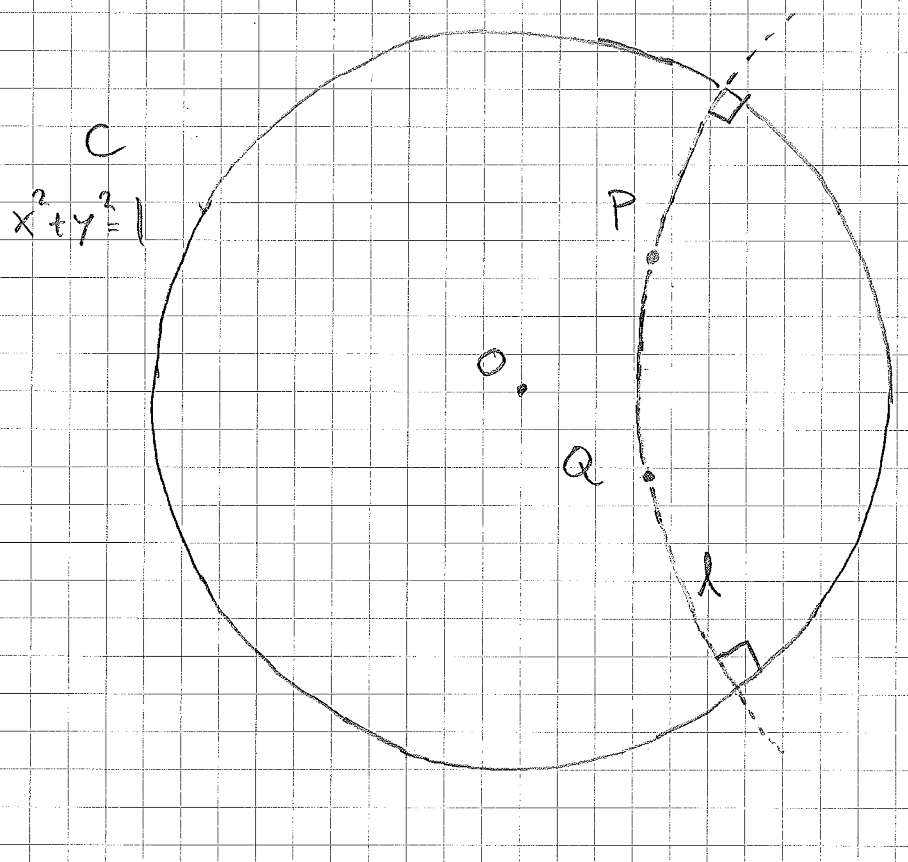
2) Kleins modell



linjer är kordor.

Nackdel: Vinklarna i $\mathbb{H}^2$ är inte lika med de i modellen

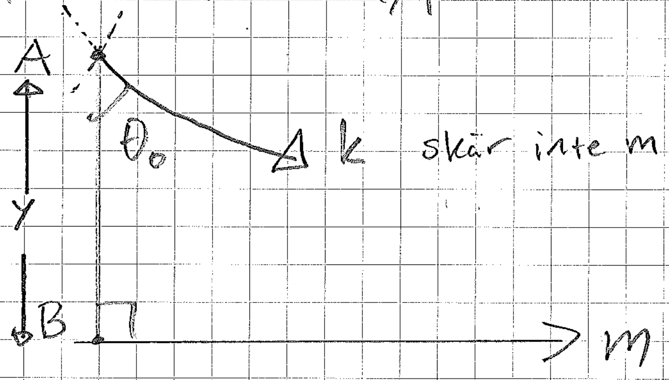
3) Poincarés cirkelmodell.



Linjen genom P och Q är den unika cirkelbåge som är ortogonal mot C.

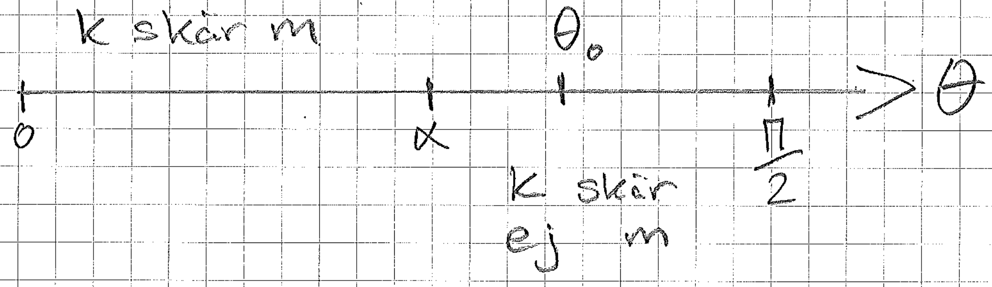
Mer om denna modell senare.

Låt oss nu utforska det hyperboliska parallellaxiomet. Målet är att visa att det finns en triangel med positiv defekt, $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)>0$. Jag följer Ramsay och Richtmeyers bok Introduction to Hyperbolic Geometry.



$\theta_0 < \pi/2$

Det finns en alldeles speciell vinkel α, parallellvinkeln, som utgör den <u>minsta övre begränsningen</u> till vinklarna vid A som ger skärning av m.

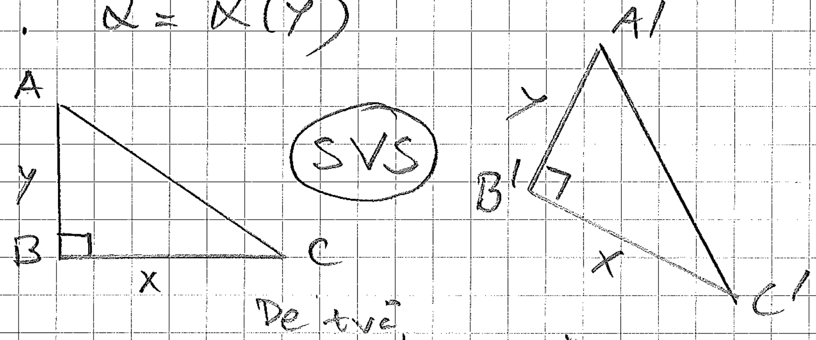


* Skär strålen med vinkel α linjen m?

Ett motsägelsebevis kanske!?

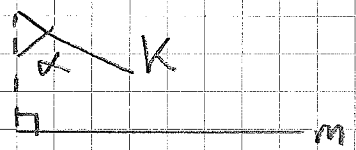
<u>SATS.</u> Parallell vinkeln α beror endast på avståndet y mellan A och B. $\alpha = \alpha(y)$

<u>Bevis</u>



De två triangelarna är kongruenta.

Då vinkeln är α säger man att k och m är <u>asymptotiska till varandra.</u>



* Finn linjer som är asymptotiska till varandra i de tre modellerna.

<u>SATS</u> Det finns en triangel i det hyperboliska planet med positiv vinkeldefekt.

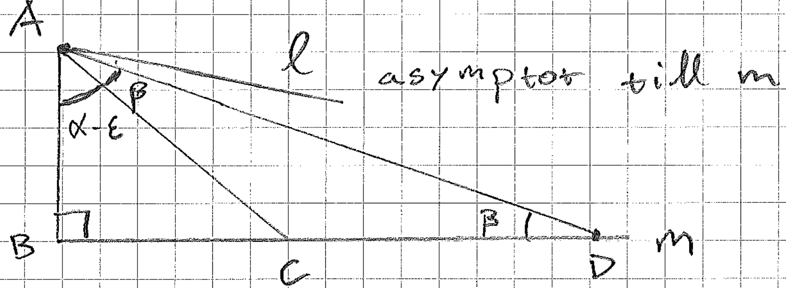
<u>Bevis</u> Vi vet att $\alpha < \frac{\pi}{2}$.

Välj en vinkel ε sådan att

$$\varepsilon < \alpha$$

och $$\varepsilon < \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Studera nu figuren på nästa sida



Starta med $\triangle ABC$. Vinkeln $BAC = \alpha - \varepsilon$. Välj D så att $\triangle ACD$ är likbent.

$|AC| = |CD|$, $\beta < \varepsilon$.

Vinkeln $\beta < \varepsilon$. Varför?

Vinkeln BAD är mindre än α. Varför?

Vinkelsumman i triangeln BAD är mindre än

$$\frac{\pi}{2} + \alpha + \varepsilon$$

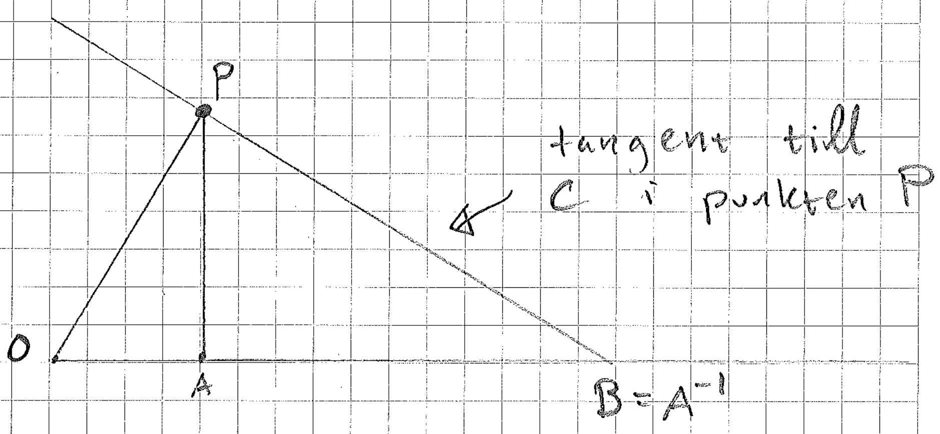
Så defekten är större än

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \varepsilon\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha - \varepsilon$$

$= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \varepsilon$. Kom ihåg att vi skulle välja $\varepsilon < \frac{\pi}{2} - \alpha$.

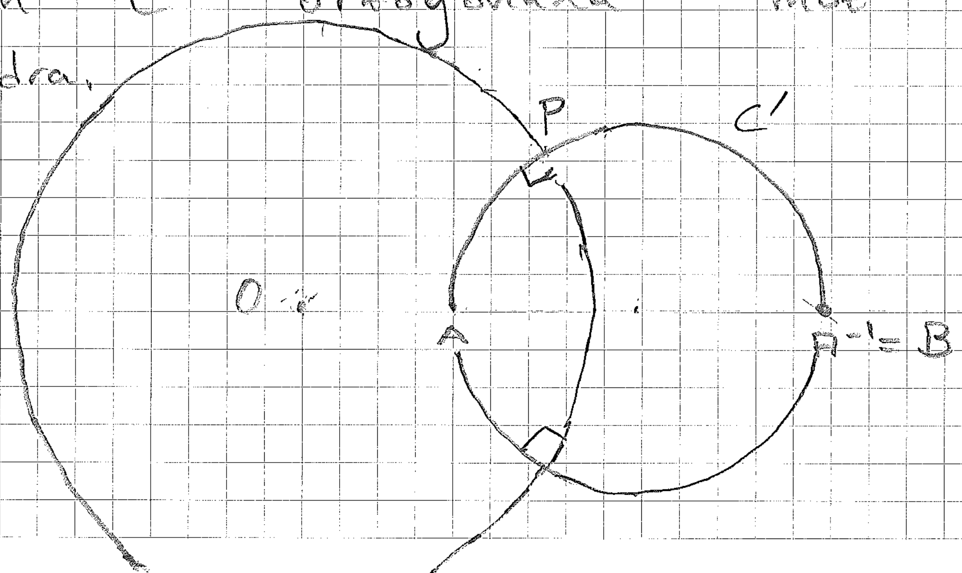
Vi avslutar med några konstruktioner i Poincarés cirkel. De är intressanta i sig! Man kan glömma HG om man vill.

Invertera en punkt m.a.p. en cirkel C med centrum i O.



* Vilket samband råder mellan OA, OB och cirkelns radie r? Tänk igenom konstruktionen så du förstår den. Hur gör du om A ligger utanför cirkeln?

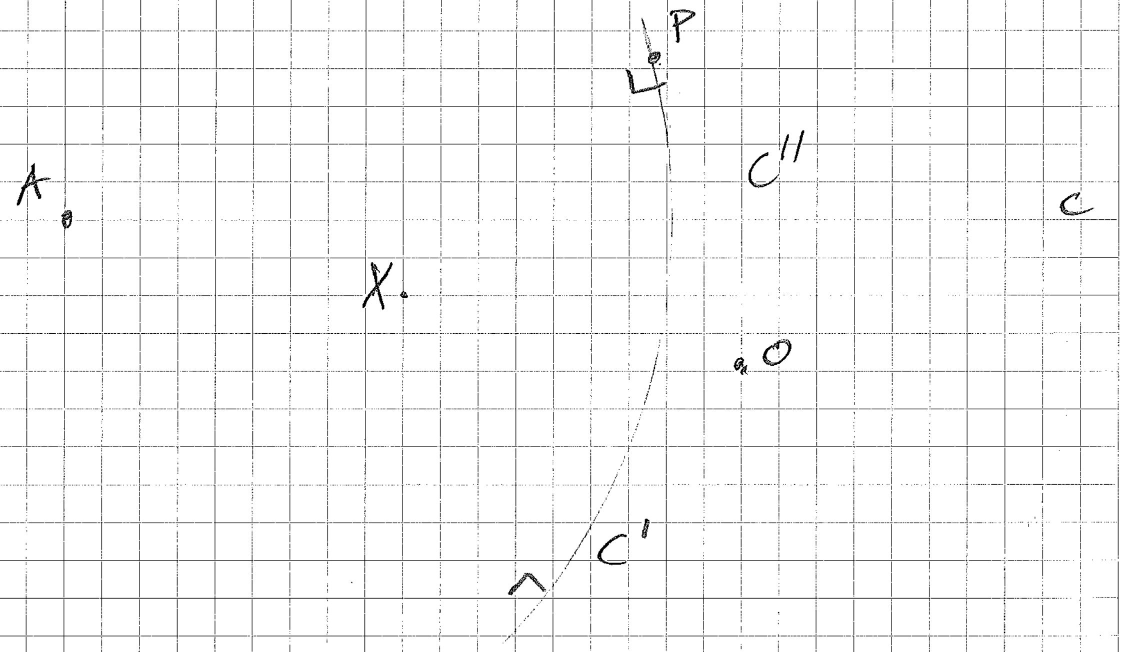
Om man låter en cirkel C′ gå genom A och dess i C inverterade punkt A^{-1} så är C och C′ ortogonala mot varandra.



7

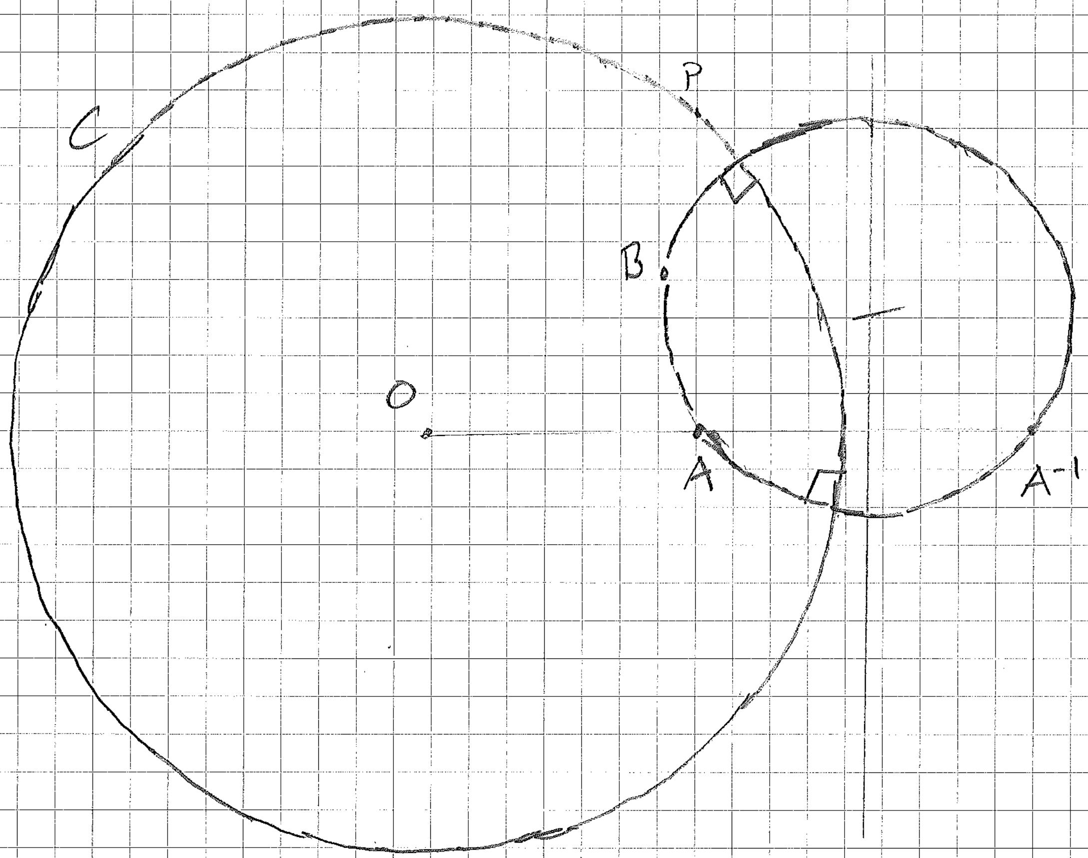
Här valde jag mittpunkten till AB som centrum för C' men jag kunde valt centrum varsomhelst på mittpunktsnormalen och C' är fortfarande ortogonal mot C.

Givet en cirkel C med centrum i O och en punkt A utanför C, konstruera den unika cirkeln C' med centrum i A som är ortogonal till C.



X är mittpunkt på sträckan OA och centrum för en cirkel C'' som skär C i punkten P. Den sökta cirkeln har radie AP.

Givet två punkter A, B i en cirkel C, konstruera den unika cirkeln C′ som går genom A och B och är ortogonal mot C.



Invertera A i C (se den första konstruktionen).

Finn den cirkel som går genom A, B och A^{-1}. Den är ortogonal mot C!

* Tänk igenom att det verkligen är så.