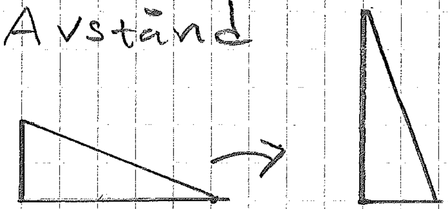
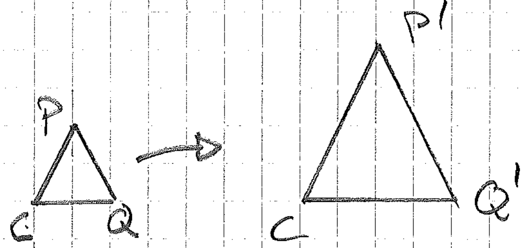
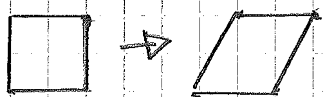
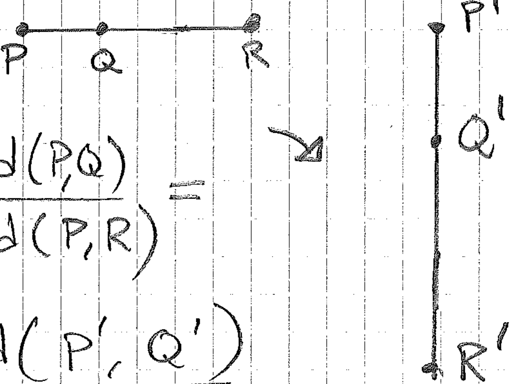
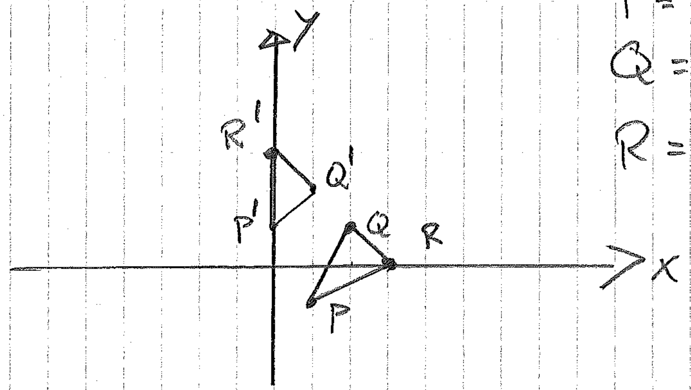
Projektiv Geometri (PG)

("Linjalens Geometri")

Avbildning	Hur?	Bevarat
Kongruens	Rotationer, Speglingar, Förflyttningar (translation)	Avstånd 
Likformighet	Förstoringar, Förminskningar, nu tillåtna	 $\frac{d(P,C)}{d(C,Q)} = \frac{d(P',C)}{d(C,Q')}$
Affinitet	Töjning och Skjuvning tillkommer Rät linje avbildas på rät linje.	   $\frac{d(P,Q)}{d(P,R)} = \frac{d(P',Q')}{d(P',R')}$ Avståndsförhållanden på <u>en linje</u> bevaras.

Man kan visa att varje triangel i planet kan avbildas till varje annan triangel med hjälp av en affinitet.

P1)



$P=(1,-1)$ $P'=(0,1)$
$Q=(2,1)$ $Q'=(1,2)$
$R=(3,0)$ $R'=(0,3)$

Beskriv hur du steg för steg transformerar $\triangle PQR$ till $\triangle P'Q'R'$. Tillåtna operationer är spegling, rotation, translation, förstoring, förminskning, töjning och skjuvning.

Det sista steget i denna utvidgning av geometrin är projektiv geometri. Inspirationen till denna kommer från perspektivmålning (Italien 1400-talet). En ny ingrediens är att vi måste utvidga planet med en horisontlinje bestående av oändlighetspunkter.

För projektiva avbildningar gäller att <u>dubbelförhållandet</u>

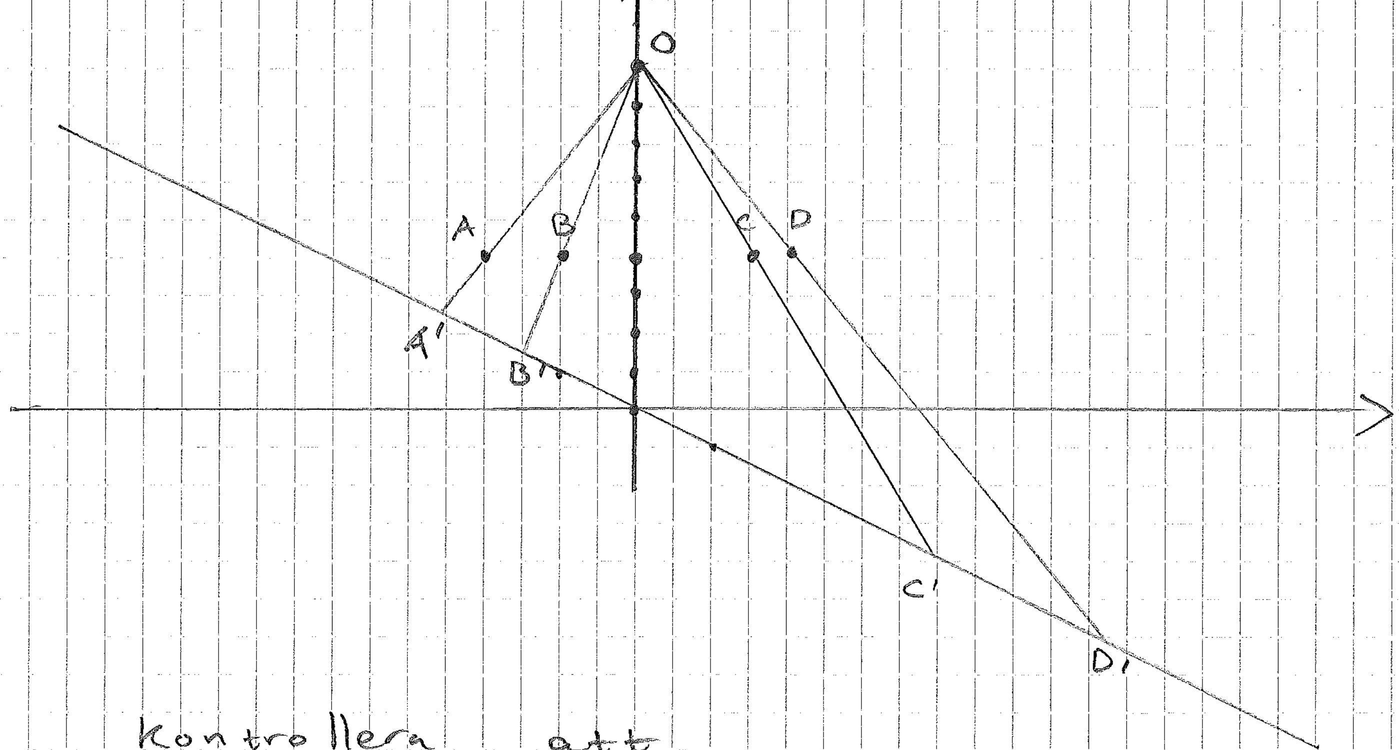
$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \Big/ \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}$$

$\overrightarrow{AC}$ o.s.v. är riktade sträckor.

är bevarat. Se sidan 195 för ett bevis.

Ex) Perspektivcentrum i $(0,9)$.

$A=(-4,4)$, $B=(-2,4)$, $C=(3,4)$ och $D=(4,4)$ avbildas på linjen $y=-\frac{x}{2}$.



Kontrollera att

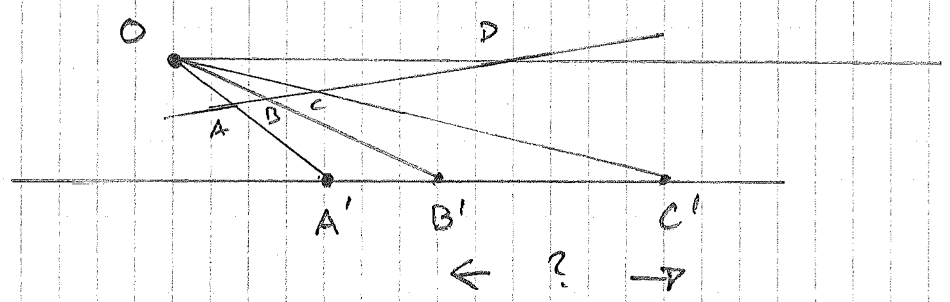
$$\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \Big/ \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}\right) = \left(\frac{\overrightarrow{A'C'}}{(\overrightarrow{A'D'})} \Big/ \frac{\overrightarrow{B'C'}}{\overrightarrow{B'D'}}\right)$$

Om D' är en oändlighetspunkt så förenklas högerledet till

$$\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{B'C'}}$$

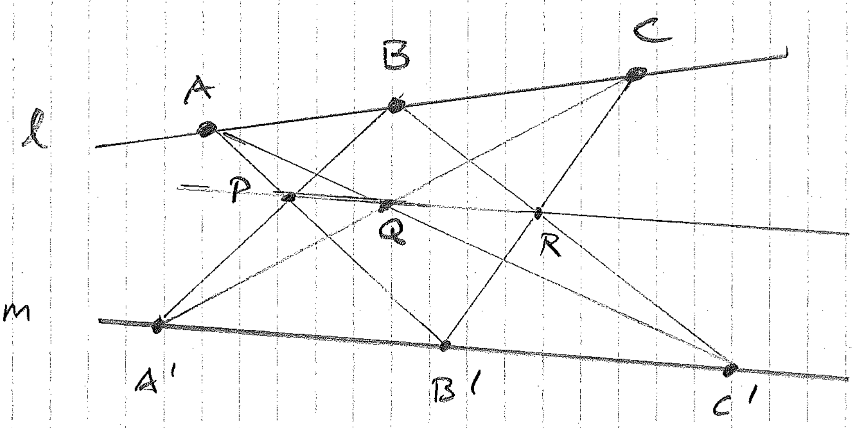
eftersom $\dfrac{\overrightarrow{B'D'}}{\overrightarrow{A'D'}} = 1 \qquad (D' = \infty)$

P2)



Tag ett foto på 3 personer på rät linje med horisonten i fjärran. Beräkna $B'C'$ om $A'B'$ är känd. Om du inte har en kamera så använd en figur som denna ovan.

Finns det några roliga satser i PG? Ja t.ex. Pappus Sats



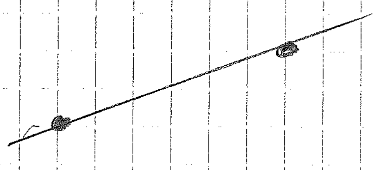
P, Q, R ligger på en rät linje!

$P = AB' \cdot A'B$, $Q = AC' \cdot A'C$, $R = BC' \cdot B'C$

Vilka är axiomen i PG?

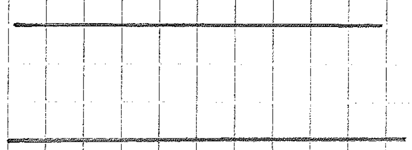
Jag presenterar dem i två dimensioner och jag följer A Course in Modern Geometries av Judith N Cederberg.

Axiom 1. Två godtyckligt valda skilda punkter ligger på precis en linje.



Axiom 2. Två godtyckligt valda skilda linjer har åtminstone en punkt gemensam.

Hoppsan! Inga parallella linjer i PG.

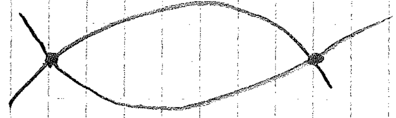


Skär varandra i ∞-punkt.

Vi kan nu formulera <u>dualen</u> till A1.

DA1. Två godtyckligt valda skilda linjer skär varandra i precis en punkt.

P3) Bevisa DA1 utifrån A1 och A2.



Duala satser får man genom att byta

linjer $\Leftrightarrow$ punkt

skär varandra $\Leftrightarrow$ ligger på en rät linje.

PG uppfyller __dualitetsprincipen.__

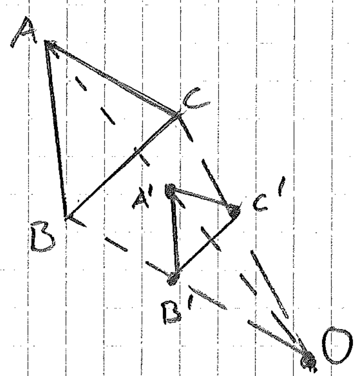
Dualen till ett teorem är också ett teorem.

P4) Formulera dualen till Pappus sats och illustrera den i en figur. (Välj dina linjer med omsorg så figuren får plats på ett A4)

Det finns totalt sex axiom.
T.ex.

Axiom 5. (Desargues' sats)

Om två trianglar är perspektiviska* från en punkt så är de perspektiviska från en linje.**



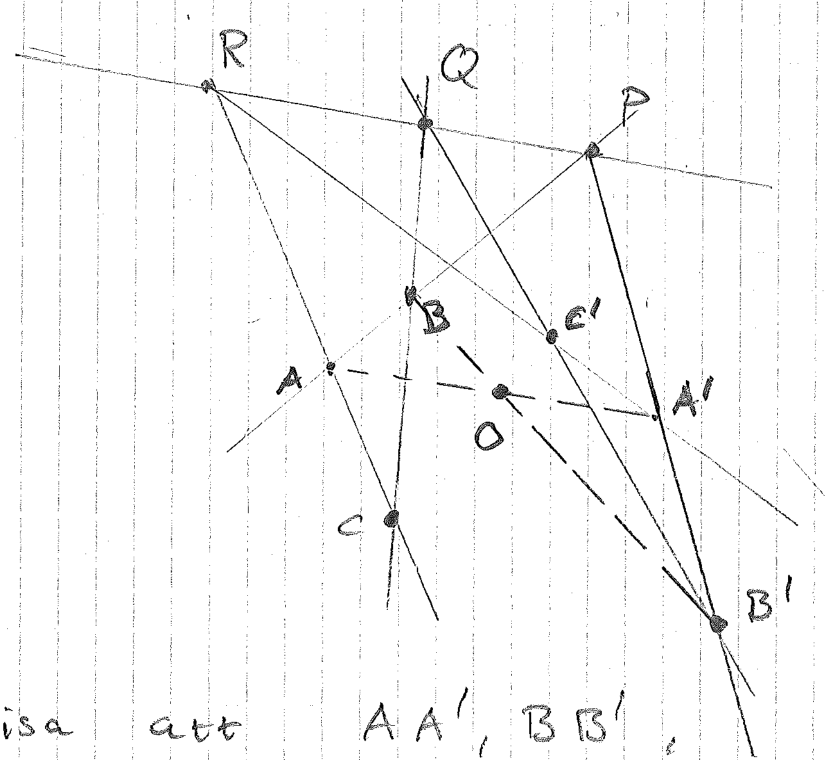
*) linjerna AA', BB', CC' skär varandra i en punkt O.

**) Skärningspunkterna $AB \cdot A'B'$, $AC \cdot A'C'$ och $BC \cdot B'C'$ ligger på en rät linje.

Går att bevisa som en sats i tre dimensioner. Se figur 5.11 i kursboken. Ett axiom i 2D.

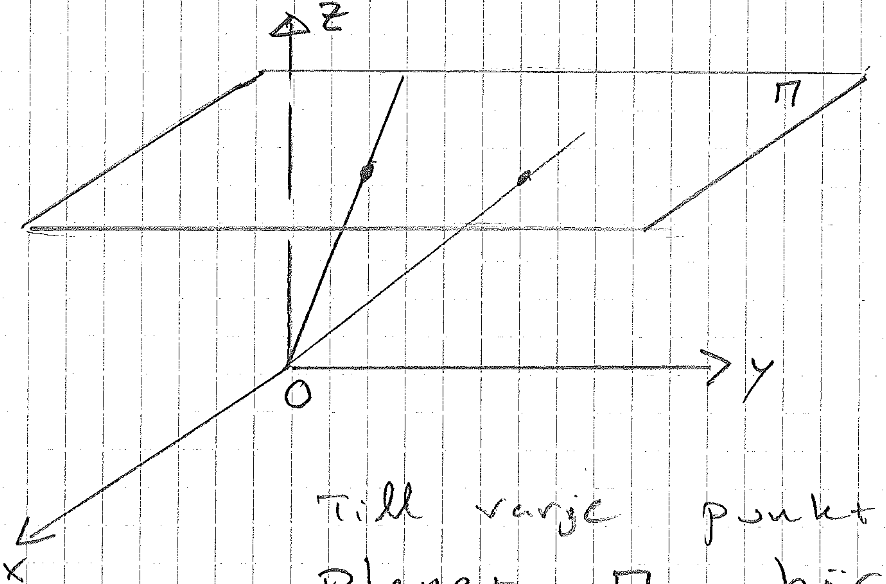
P5) Konstruera två trianglar som är perspektiviska från en linje. Visa i din figur att trianglarna är perspektiviska från en punkt. Alltså finn punkten O.

Att det går är en konsekvens av dualen till axiom 5:



Visa att AA', BB', och CC' alla skär varandra i en punkt O. Låt $O = AA' \cdot BB'$. Räcker att visa att O ligger på CC'. Studera $\triangle RAA'$ och $\triangle QBB'$. Visa att de är perspektiviska från P. Det betyder enligt axiom 5 att de är perspektiviska från en linje. Tror du att du kan slutföra beviset nu?

Ibland kan det vara bra att kunna visualisera det projektiva planet. Man behöver en modell.



Till varje punkt i planet Π hör en linje genom O.

Till varje linje i Π hör ett plan som innehåller O.

Mot en linje i xy-planet svarar en ideal punkt.

Mot xy-planet svarar en ideal linje.

Projektiva planet = Π + ideala punkter och ideala linje

Eftersom ett plan har en normal (linje) och en linje kan ses som en normal till ett plan kan vi förstå hur de duala teoremen uppstår

Till sist ....

Det finns intressanta satser om kägelsnitt i PG. T.ex.

Pascals sats. Sex skilda punkter A, B, C, A', B', C' ligger på ett kägelsnitt (t.ex. en ellips). Då ligger punkterna $AB' \cdot A'B$, $AC' \cdot CA'$ och $B'C \cdot BC'$ på en linje.

P6) Fem punkter A, B, C, A', B' ligger på en ellips. Använd Pascals sats för att få fram en sjätte punkt C' på ellipsen. (vilken som helst)