Linneuniversitetet
Matematik
Hans Frisk

Uppgifter med GeoGebra (GG), 2021, Geometeri, 1MA113, 7,5 hp

Tänk er att ni skall visa ett problem för era elever eller producera en figur till ett prov. Det skall se snyggt och välstädat ut när ni är klara men algebrafältet skall bifogas så vi kan se hur ni gått till väga. Skriv vid behov lämpliga textrutor. Till skillnad från veckoproblemen behöver ni inte räkna ut exakt var punkter ligga. Använd GG-verktygen och zooma in om det behövs. Max 10 poäng och 5p krävs för G.

I många uppgifter skall man flytta en punkt och se vad som händer. Smidigt att då använda kommandot Punkt på Objekt, då går punkten att flytta på objektet som kan t.ex. vara en linje eller cirkel. Spåret av en punkt vill man se ibland. Då högerklickar man på punkten och väljer Trace On. När man sedan flyttar en annan punkt kommer det bildas en tjock kurva.

Man kan inte lägga in ggb-filer i inlämningsboxen men pdf, png och html accepteras och jag sätter max till 5 filer (om ni vill visa olika fall). Man kan exportera ggb-filen som pdf eller png. Gå till Arkiv och välj Ladda ned som. Där skall du också välja Konstruktionsprotokoll.En html-fil med inmatningarna skapas då.

1. Konstruera en triangel ΔABC och dess inskrivna cirkel. Vi kan anta att vinklarna är sådana att $A > B > C$. Konstruera sedan en andra cirkel som är inskriven i den delen av triangeln där C finns. Den skall tangera den första cirkeln samt två av triangelns sidor.

2. Konstruera en triangel ΔABC där alla vinklar är mindre än 90 grader. Konstruera de tre höjderna. Höjdernas skärningspunkter med sidorna bildar en ny triangel, $\Delta A_1B_1C_1$. Skicka ut en stråle från A_1 mot B_1 och reflektera den vid B_1 (infallsvinkel är=utfallsvinkel). Var skär den utgående strålen triangeln? Till sist, reflektera även denna. Slutsats?

3. Fem punkter U_1, U_2, A, B, C bestämmer ett kägelsnitt. Välj fem punkter i planet, inga tre på en rät linje och ge dem beteckningarna U_1, U_2, A, B, C. Dessa fem punkter kommer att ligga på kägelsnittet. Dra linjerna $q = AB$ och $p = AC$ och bilda punkten $F = U_1B \cdot U_2C$. F är alltså skärningen mellan linjerna U_1B och U_2C. En sjätte punkt X på kägelsnittet kan nu bildas på följande sätt: Skicka ut en linje från U_1, den skär linjen p vid Y_1. Drag sedan linjen Y_1F och se var den skär linjen q. Kalla denna nya punkt Y_2. Dra till sist linjen U_2Y_2. Vår sökta punkt är $X = U_1Y_1 \cdot U_2Y_2$. Ändra nu strålen från U_1 och se hur X ändras. Ha trace on funktionen inkopplad så du ser spåret av X. Blev det en ellips, en hyperbel eller kanske en parabel? Flytta på dina fem ursprungliga punkter och se om du skapa andra kägelsnitt. Här kan det vara bra att ordna med ett reglage. Slå en liten cirkel om U_1 och lägg en punkt P på denna cirkel (point on object). När du drar linjen från U_1 så låt den vara U_1P. Vill du ändra på linjen så flyttar du bara P längs cirkeln.

4. Lös problem 8 i kursboken med hjälp av GG. Figuren du skall rita ges av följande text: Man vill mäta avståndet mellan två punkter A och B i terrängen. Det är emellertid omöjligt att gå raka vägen mellan de båda punkterna. Istället följer man först en stig från A som bildar 50 grader med AB till dess man kommer till en punkt P. AP=150 meter. Vid P viker man av 20 grader mot B längs en annan stig tills man kommer till en annan punkt Q. PQ=50. Från Q viker man sedan av 40 grader på en stig som leder direkt till B. Alla stigar är räta linjer. Bestäm AB.

5. Tre cirklar C_1, C_2 och C_3 tangerar alla varandra (alla med alla) och vardera tangerar 2 på vartannat följande sidor i en omskriven kvadrat. Rita en sådan figur.

6. Sätt ut två punkter på y-axeln. A vid (0,1) och B högre upp. Finn nu 2 cirklar C_1 och C_2 med medelpunkter på x-axeln sådana att C_1 skall gå genom A och C_2 genom B. Dessutom skall tangenterna i båda fallen bilda 45 grader med y-axeln. Medelpunkten för C_1 skall ha en positiv x-koordinat och medelpunkten för C_2 skall ha negativ x-koordinat. C_1 och C_2 skär varandra i en punkt C i första kvadranten. Beräkna vinkeln, γ, mellan tangenterna i skärningspunkten. Du har nu konstruerat en s.k. hyperbolisk triangel med vinklarna 45 grader, 45 grader och γ. Flytta nu punkten B så att γ kommer så nära 45 grader som möjligt.

7. Tre cirklar, C_1, C_2, C_3, är disjunkta vilket betyder att de är åtskilda åt (inga gemensamma punkter) och de har radierna 1,2 och 3. Finn den inskrivna cirkel, C, som tangerar alla tre cirklarna (alla tre cirklarna ligger alltså utanför C). Här måste du använda hyperbelverktyget. När två cirklar tangerar varandra så går det en rät linje genom medelpunkterna och tangeringspunkten. För en hyperbel gäller att för varje punkt på hyperbeln är skillnaden i avstånd till två fixa punkter alltid den sammma.

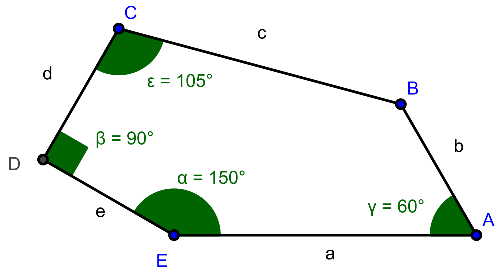
8. Välj en linje l och två punkter F_1 och F_2 på denna och en tredje punkt A utanför linjen. Rita en ellips med F_1 och F_2 som brännpunkter som går genom punkten A. Spegla en linje som går igenom den ena brännpunkten och A och se att den reflekteras i den andra brännpunkten. För reflektionen behöver du tangenten till ellipsen i punkten A. Illustrera sedan med hjälp av GG att summan av avstånden från en punkt på randen till de två brännpunkterna är konstant. Du skall alltså flytta runt punkten och se att summan inte ändras. Till sist, tag en punkt på ellipsen och skicka ut en stråle mellan brännpunkterna F_1 och F_2. Gör tre reflektioner som ovan. Flytta dina punkter och se om du kan hitta en periodisk bana (tänk på en biljardkula) med tre studsar mot ellipsen. Banan skall alltså se ut som ett V.

9. Ett verktyg för att tredela en vinkel brukar kallas tomahawk. Tag en halvcirkel med radien r och diametern DB och centrum O. Förläng diametern en sträcka r till en punkt A så att $|BA| = r$. En normal till DA genom B behöver du också. $\angle UVW$ skall delas i tre lika delar. Placera V på normalen (på samma sida som halvcirkeln). VU skall gå genom punkten A och VW skall tangera halvcirkeln. Kontrollera med GG att sträckorna VB och VO delar den givna vinkeln i tre delar. Flytta runt V på normalen och se att det alltid gäller. Om man sätter till en likadan tomahawk med centrum i A som tangerar den första tomhawken i B så kan man dela en vinkel i fem lika delar. Prova!

10. En punkt P reflekteras i en triangels tre sidor. Illustrera i GG att de tre spegelpunkterna ligger på samma räta linje då och endast då P ligger på den till triangeln omskrivna cirkeln.

11. Konstruera följande oregelbundna femhörning: Sträckan $a = 1$, $b = d = e = 1/2$ och $c = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$, se figur. Man har funnit att med hjälp av sådana här femhörningar kan man täcka hela planet. Om du googlar på Tesselations of the Plane with Pentagons (övertäckning av planet med pentagoner) kommer du hitta din figur. Gör några steg i denna mosaik. Man kan spegla punkter i linjer och parallellförflytta punkter i en viss riktning. Man kan också bestämma färg på femhörningarna.

12. Konstruera en löparbana. Långsidorna skall ha längden 10. De båda cirkelbågarnas medelpunktsvinklar är 180 grader (halvcirklar). Totala längden av löparbanan skall vara 40.



Finn en periodisk bana inne i stadion som kommer tillbaks till startpunkten efter två reflektioner på sådant sätt att om inkommande stråle reflekteras på nytt så kommer rörelsen att upprepas. Vi får en inskriven triangel inne i stadion.

13. Konstruera en godtyckligt vald triangel ΔABC där alla vinklar är mindre än 120 grader. Konstruera sedan en liksidig triangel utåt från varje sida så du får tre nya liksidiga trianglar ΔA_1BC, ΔAB_1C och ΔABC_1. Visa med GG att linjerna AA_1, BB_1 och CC_1 är konkurrenta (alltså skär varandra i en punkt). Kalla skärningspunkten P. Illustrera för dina elever att denna punkt inne i triangeln minimerar summan av avstånden till hörnen. Det kan du göra genom lägga in en annan punkt Q inne i triangeln och beräkna $QA + QB + QC$ i inmatningsfältet.

14. Illustrera Cevas sats för dina elever. Det finns ett inmatningsfält som du måste använda. Du får läsa om Ceva's theorem på internet. Flytta runt den inre punkten och se vad som händer.

15. Visa nio-punkts cirkeln för dina elever. Du får läsa om nine-point circle på internet. Modifiera din triangel och se vad som händer.

16. Varje triangel ΔABC har tre *vidskrivna cirklar*. Var och en av dessa cirklar tangerar en av triangelns sidor på utsidan samt förlängningarna av de båda andra sidorna. Konstruera dessa tre cirklar. Låt A_1 vara tangeringspunkten på BC, B_1 vara tangeringspunkten på AC och C_1 vara tangeringspunkten på AB. Visa i GG att linjerna AA_1, BB_1 och CC_1 är konkurrenta (d.v.s. de skär varandra i en punkt).

17. För en given sträcka AB försök beskriv mängden av alla möjliga in-centrum för trianglar ΔABC. In-centrum är centrum för den inskrivna cirkeln i triangeln. Du få ha trace on funktionen på när du flyttar runt punkten C. Kom med en hypotes och försök argumentera för den med hjälp GG.

18. Lös följande problem med GG: I en parallellogram $ABCD$ dras diagonalen BD. En stråle utgående från A skär BC:s förlängning i punkten G. Sträckan AG skär diagonalen BD i

punkten E och sidan CD i punkten F. AE=4 och EF=3. Bestäm FG.
Du alltså konstruera en korrekt figur och sedan låta GG ange FG. Inga räkningar behövs..

19. Starta med en ellips. Välj en punkt A utanför ellipsen. Konstruera de två linjerna genom A som tangerar ellipsen. Tag en av dem, den tangerar ellipsen i en punkt P. Fortsätt i AP:s riktning lika långt till. Markera denna nya punkt med B. Alltså $AB = 2AP$. Dra nu en ny tangent från B och upprepa proceduren. Denna tangent tangerar vid Q och du skall alltså fortsätta till C där $BC = 2BQ$. Och så vidare. Gör iterationen 1,2 och 3 gånger till. Kan du hitta periodiska banor av längd 3,4 och 5?

20. Illustrera Brianchons sats. (Sats 5.14 i kursboken). Du skall kunna flytta runt punkterna på ellipsen.

21. Konstruera en figur till följande problem och låt GG ge ett approximativt värde för arean. Två cirklar har samma radie och skär varandra. Vinkeln mellan cirklarnas tangenter i en skärningspunkt är rät. Avståndet mellan cirklarnas medelpunkter är 20 (i någon enhet, t.ex. cm). Bestäm arean av det område som är gemensamt för de två cirklarna. Här får du placera ut många punkter, säg 20, på randen av området och sedan använda polygonverktyget. Klicka på en punkt A och fortsätt sedan att klicka på punkt efter punkt längs området. Glöm inte klicka på A på slutet. Nu kan du använda areaverktyget.

22. Låt P vara en punkt på förlängningen av storaxeln till en ellips och beteckna mittpunkten på tangentkordan till P för Q. Tangentkordan är kordan mellan de två punkter på ellipsen som fås när man när man drar tangenterna från P till ellipsen. En punkt P_1 ligger på en rät linje genom P parallell med ellipsens lillaxel. Illustrera med GG att tangentkordan till P_1 går genom Q genom att flytta runt P_1.

23. Konstruera en hyperbolisk triangel i cirkelmodellen. Det går till på följande sätt: Konstruera en cirkel c med centrum O och välj tre punkter, A, B, C, inne i denna. Inga två av dem skall ligga på en diameter. Mellan punkterna skall dras *geodeter* (inte linjer). I detta fall är de cirkelbågar sådana att om man förlänger dem så skall de skära cirkeln c under rät vinkel. Hur finner man då geodeten mellan A och B? Jo man *inverterar* en av punkterna, t.ex.A, i cirkeln c och får då punkten A_1. Sedan drar man den unika cirkel som går genom A, A_1, B. Gör på samma sätt för A, C och B, C. Städa upp och presentera endast triangeln. Låt GG beräkna de tre vinklarna och kontrollera att vinkelsumman är mindre än 180 grader. Vinkeln vid A är vinkeln mellan tangenterna för de två cirkelbågarna och gör på samma sätt för de andra två hörnen. För hur inverteringen går till se mina inspelade föreläsningar eller googla på How to inverse a point in a circle.