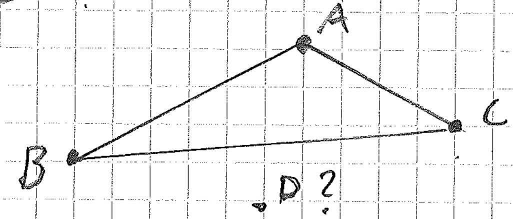
2. Geometri som deduktiv vetenskap.

EX) Givet tre orter A, B, C finns det en plats D som har samma avstånd till A, B och C?

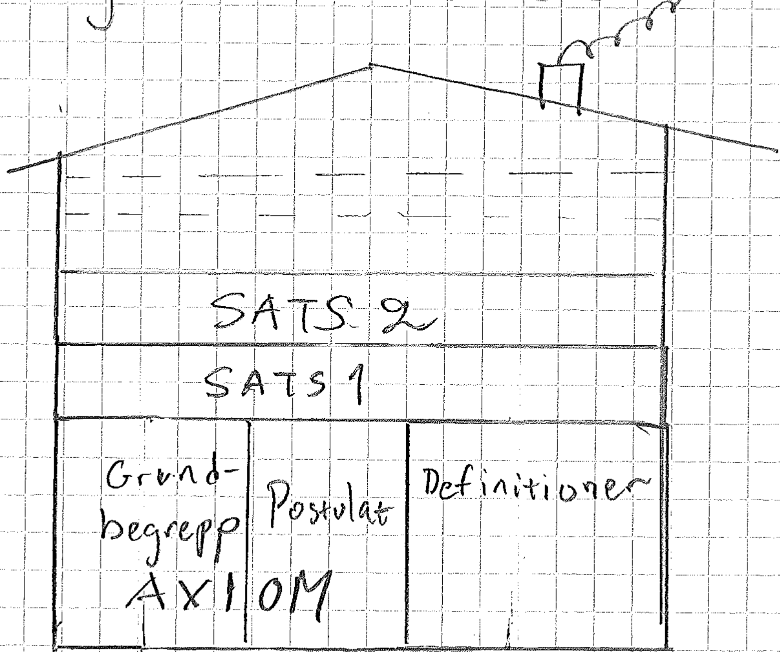


Kan vi <u>bevisa</u> att en sådan punkt D alltid finns?

Euklides Elementa 300 f.kr.
Består av 13 böcker. Finns på webben!

Grekernas "miniräknare" var passare och ograderad linjal.
Vad kan man göra med dessa verktyg?

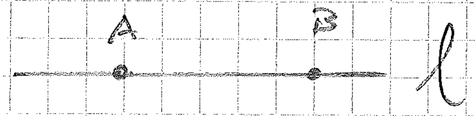
Euklides teoribygge:



<u>Deduktiva metoden</u>: Satserna härleds med hjälp av logiska resonemang utgående från några få uppenbara sanningar, d.v.s. postulaten.

Hilberts Postulat

P1: Genom två olika punkter går precis en linje.

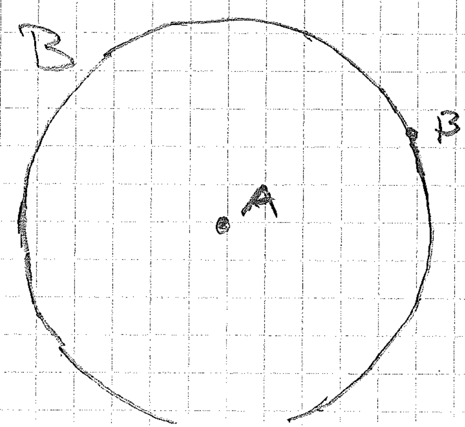


P2: Om två punkter på en linje ligger i ett plan, då ligger linjen i planet.

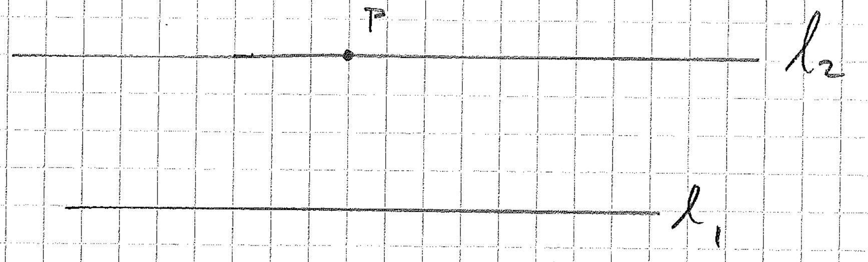
OBS Hilbert definierade inte punkt, linje och plan.

P3: Det finns räta vinklar

P4: Givet två punkter, A och B, i ett plan så kan man rita en cirkel med A som medelpunkt och som går genom B



P5:



Givet en linje l_1 och en punkt P utanför den då finns precis en linje l_2 genom P som inte skär l_1.

Euklides använde P5 först för Sats 29.

Några av Euklides definitioner

D1: En punkt är odelbar

D2: En linje är längd utan bredd.

Totalt 22 stycken.

Euklides fem grundbegrepp (axiom)

A1) Om $a=b$ och $b=c$ så är $a=c$

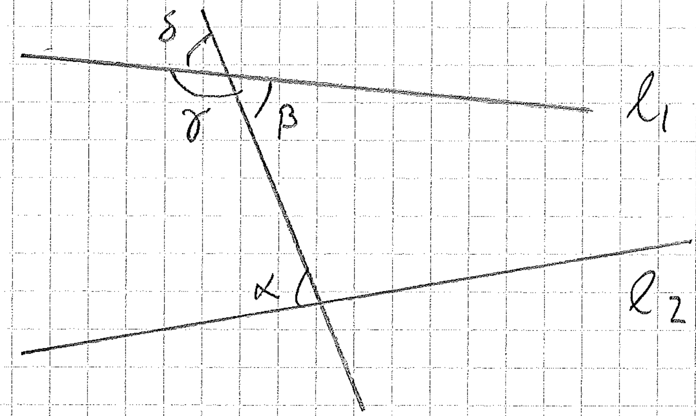
A2) Om $a=b$ så är $a+c=b+c$

A3) Om $a=b$ så är $a-c=b-c$

A4) Things which coincide with one another are equal to one another

A5) Hela är större än delen

Några beteckningar för vinklar behöver vi också.



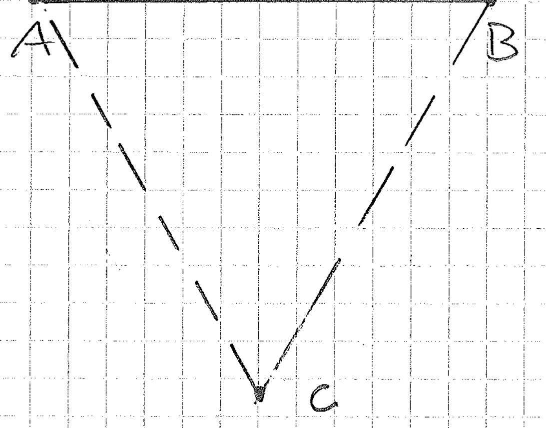
β och δ är vertikalvinklar

γ och δ är komplementvinklar

γ och α är motstående vinklar

α och β är alternatvinklar.

SATS 1: Utifrån en given sträcka kan man konstruera en liksidig triangel.



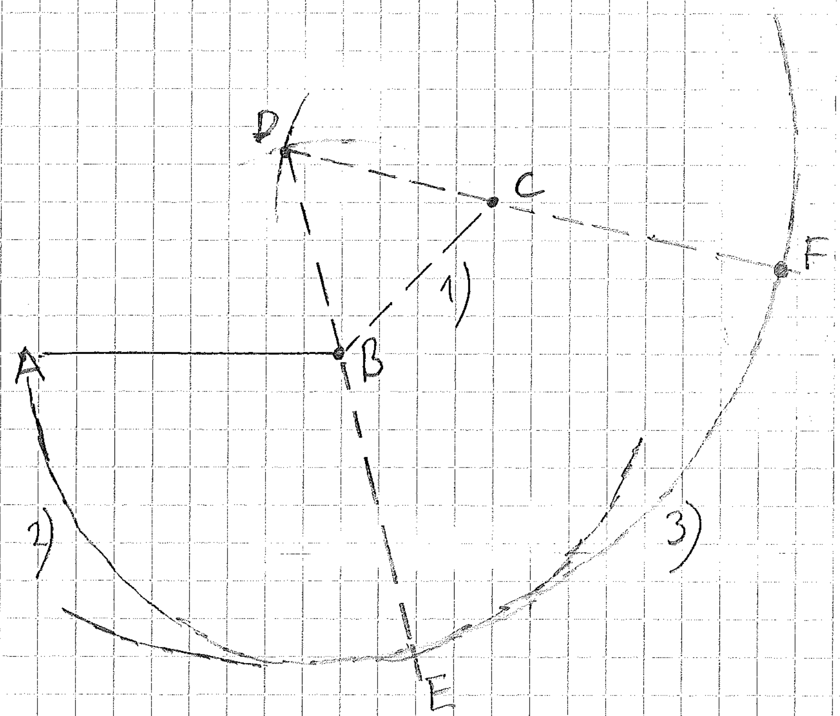
$AC = BA$

$BC = BA$

alltså är

$AC = BC$

SATS 9. Att från en given punkt C dra en sträcka lika med en given sträcka AB.



DF = DE

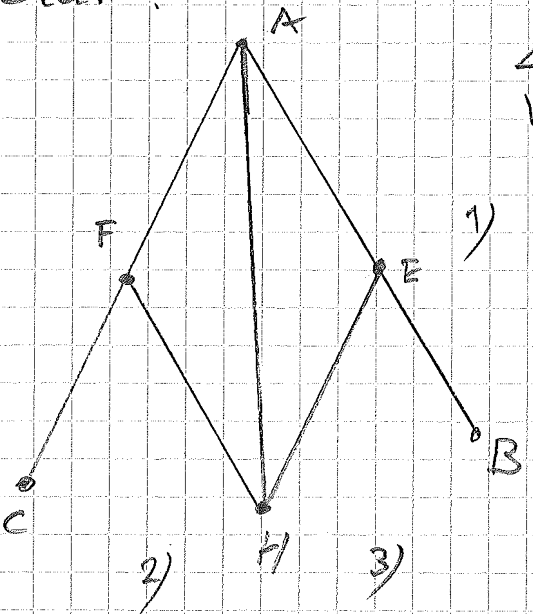
BE = CF

BE = AB

Så

CF = AB.

SATS 9 Att dela en vinkel i två lika delar.



Linjen AH är <u>bisektris</u> till ∠CAB

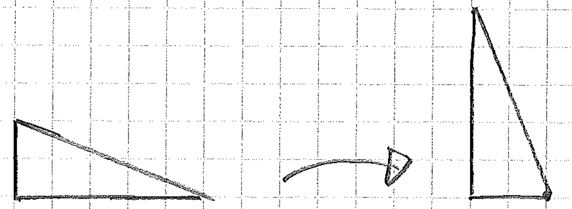
∠ CAB skall halveras.

1) △AFH och △AEH är kongruenta eftersom motsvarande sidor är lika. ⟹ ∠FAH = ∠EAH

AF = AE

FH = AF = AE = EH och AH gemensam.

Kongruens :



Translation följt av vridning 90° moturs följt av Spegling.

Tre villkor för Kongruens:

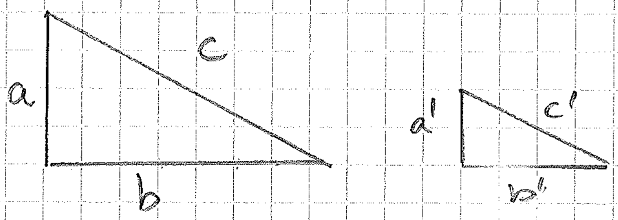
Sida – Vinkel – Sida (SATS 4)

Sida – Sida – Sida (SATS 8)

Vinkel – Sida – Vinkel (SATS 26)

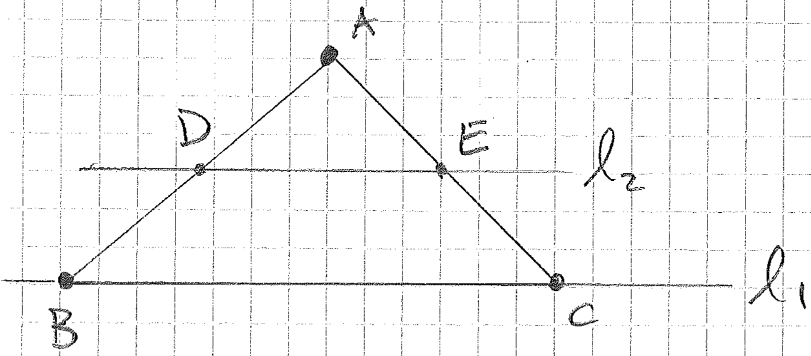
också V – V – S men inte alltid V – S – S.

Likformighet:



$$a/a' = b/b' = c/c'$$

Parallelltransversalsatsen säger att

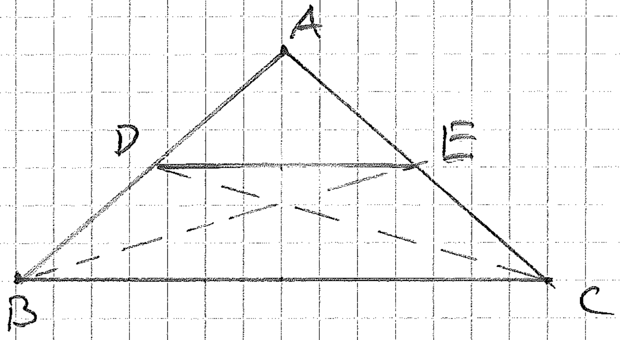


$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$l_1 \parallel l_2$$

Bevis! $\Leftarrow$



i) $\triangle BDE$ och $\triangle CDE$ har samma area eftersom DE är en gemsam bas och höjderna mot denna måste vara lika.

ii) $$\frac{\text{arean av } \triangle ADE}{\text{arean av } \triangle BDE} = \frac{AD}{BD}$$

iii) pss

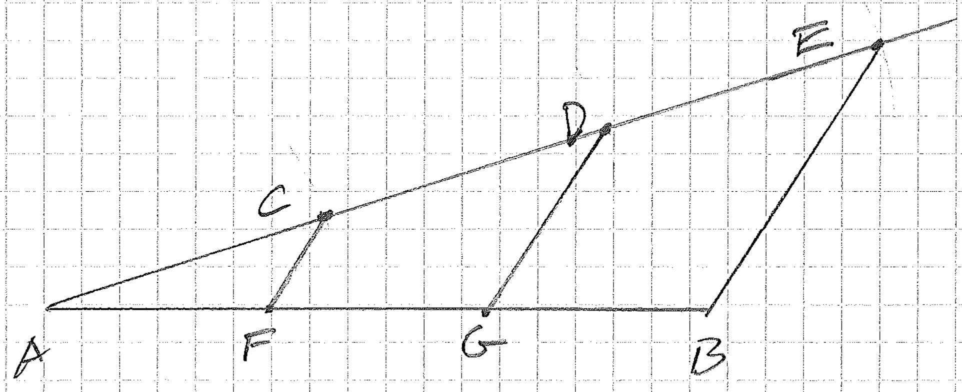
$$\frac{\text{arean av } \triangle ADE}{\text{arean av } \triangle CDE} = \frac{AE}{CE}$$

Så $$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$$

$$1 + \frac{BD}{AD} = 1 + \frac{CE}{AE}$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

Till sist: Hur delar man en sträcka AB i 3 lika delar?



AC = CD = DE

Hur drar man en linje genom D som är // med EB? (och genom C som också är // med EB)

Dessa linjer skär AB i G respektive F.

Parallelltransversalsatsen ger nu att AF = FG = GB