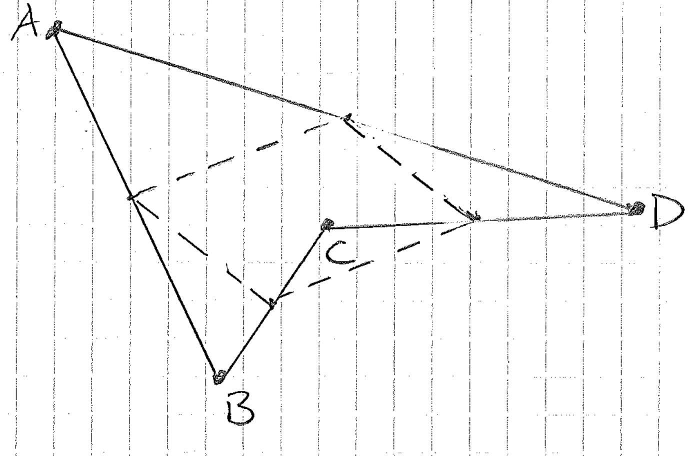
Kapitel 3, Geometri – ett område för problemlösning.

7.1 och 7.2 om konstruerbara tal.

Polyas metod vid problemlösning:

* Orientering. — Rita figur. Finns det en lösning? Finns det fler?
* Gör upp en plan.
* Genomför planen
* Kontrollera resultatet. — Är det rimligt?

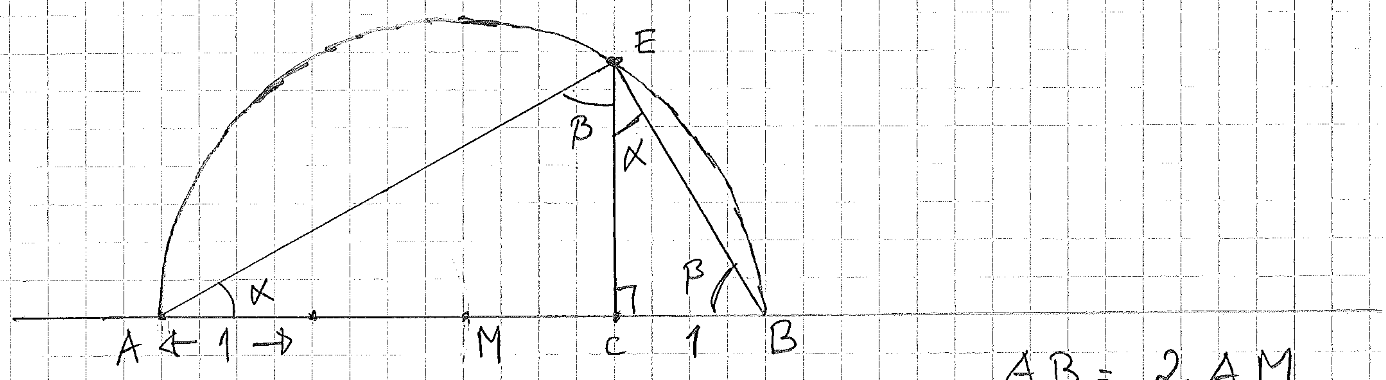
Ex)



Förbind mittpunkterna på en godtyckligt vald fyrhörning ABCD. Vad kan sägas om den nya fyrhörning som då uppkommer?

Konstruktioner med passare och linjal.

$\overline{\quad 1 \quad}$ Vår enhet. Kan du konstruera $\sqrt{3}$? Ledning: $1^2+(\sqrt{3})^2 = 2^2$



$AB = 2AM$

$CE = \sqrt{3}$ eftersom:

$\angle MAE = \alpha$

$\angle AEC = \beta$

Varför är då $\angle CEB = \alpha$?

$\triangle AEB$ är likformig med $\triangle ECB$ och $\triangle AEC$. Så

$$CE/CB = AC/CE$$

$$CE/1 = 3/CE$$

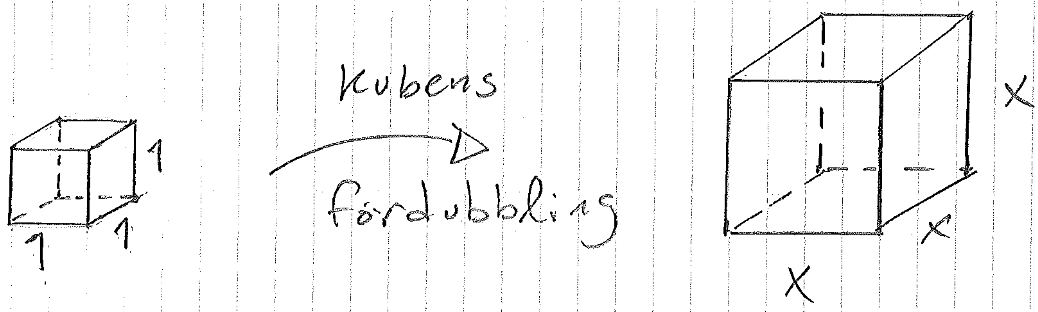
$$(CE)^2 = 3$$

$$CE = \sqrt{3}$$

Hur konstruerar du nu $\sqrt{5}$?

Går alla reella tal att konstruera på detta sätt?

Nej t.ex. är inte $2^{1/3}$ konstruerbart.

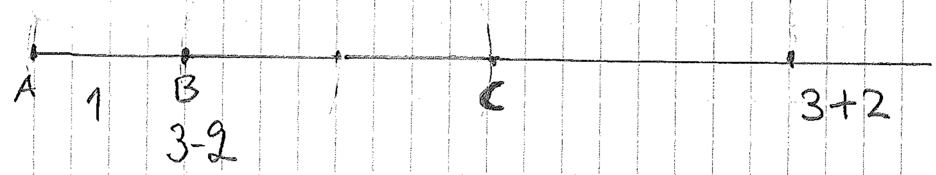


$$x^3 = 2 \cdot 1 = 2$$

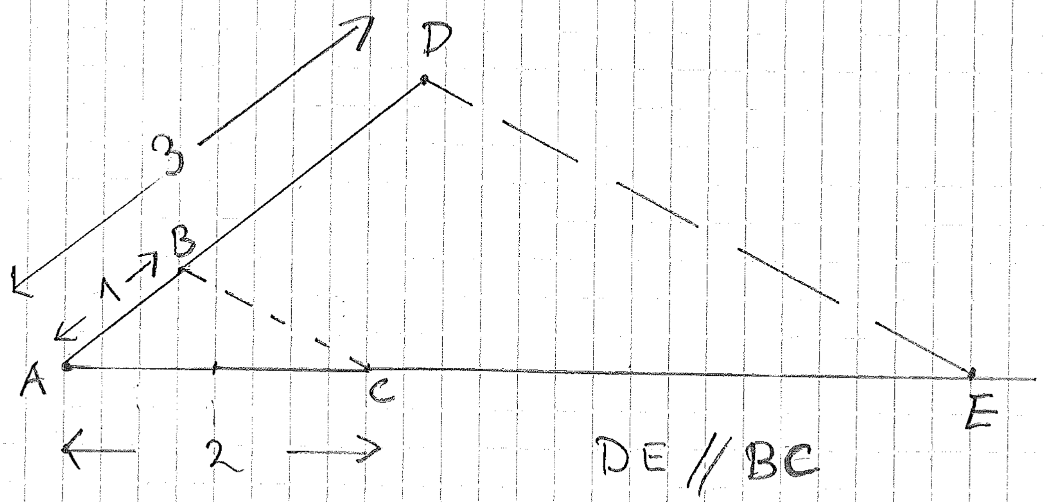
$$x = 2^{1/3}$$

De fyra räknesätten och
och rötter kan vi fixa
till med passaren och linjalen.

Ex)

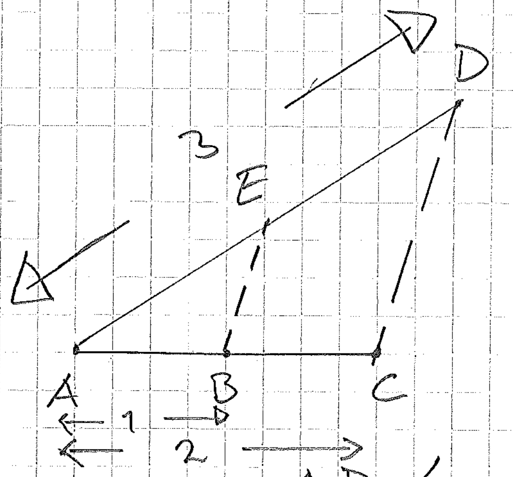


$3 \cdot 2$



Vi vet att $\frac{3}{1} = \frac{AE}{2}$ så $AE = 3 \cdot 2$

Kan du på liknande sätt
konstruera $3/2$?



$AB = 1$
$AC = 2$
$AD = 3$

$$AD/AE = AC/AB$$

$$3/AE = 2/1$$

$$AE = 3/2$$

Överraskning: $2^{1/3}$ kan inte bildas med att ett ändligt antal gånger använda de fyra räknesätten och rotutdragningar!

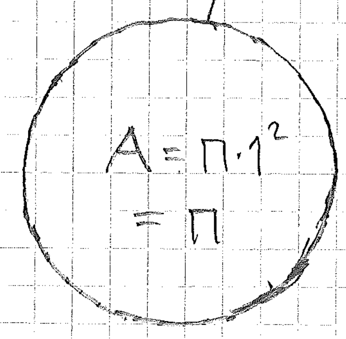
(Wantzel 1837. Abel + Galois)

T.ex.

$$\sqrt{3/2 + \sqrt{83 - \sqrt{17}}}$$ är konstruerbart.

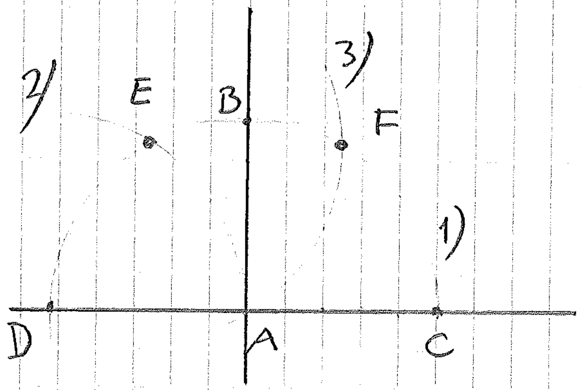
Två andra klassiska olösta problem:

i) Cirkelns kvadratur



Vi söker alltså en kvadrat med sidan x sådan att $x^2 = \pi$

ii) Vinkelns tredelning



$\angle CAB = \pi/2$ skall delas i 3 lika stora delar

$$\angle BAF = 30^\circ$$

men 60° kan inte delas i tre lika stora delar med passare och linjal.

En trigonometrisk formel är

$$\cos v = 4\left(\cos\frac{v}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{v}{3}$$

med $x = \cos\frac{v}{3}$ får vi

tredjegradsekvationen

$$4x^3 - 3x = \cos v.$$

om $v = 90^\circ$ får vi $x = \sqrt{3}/2$.

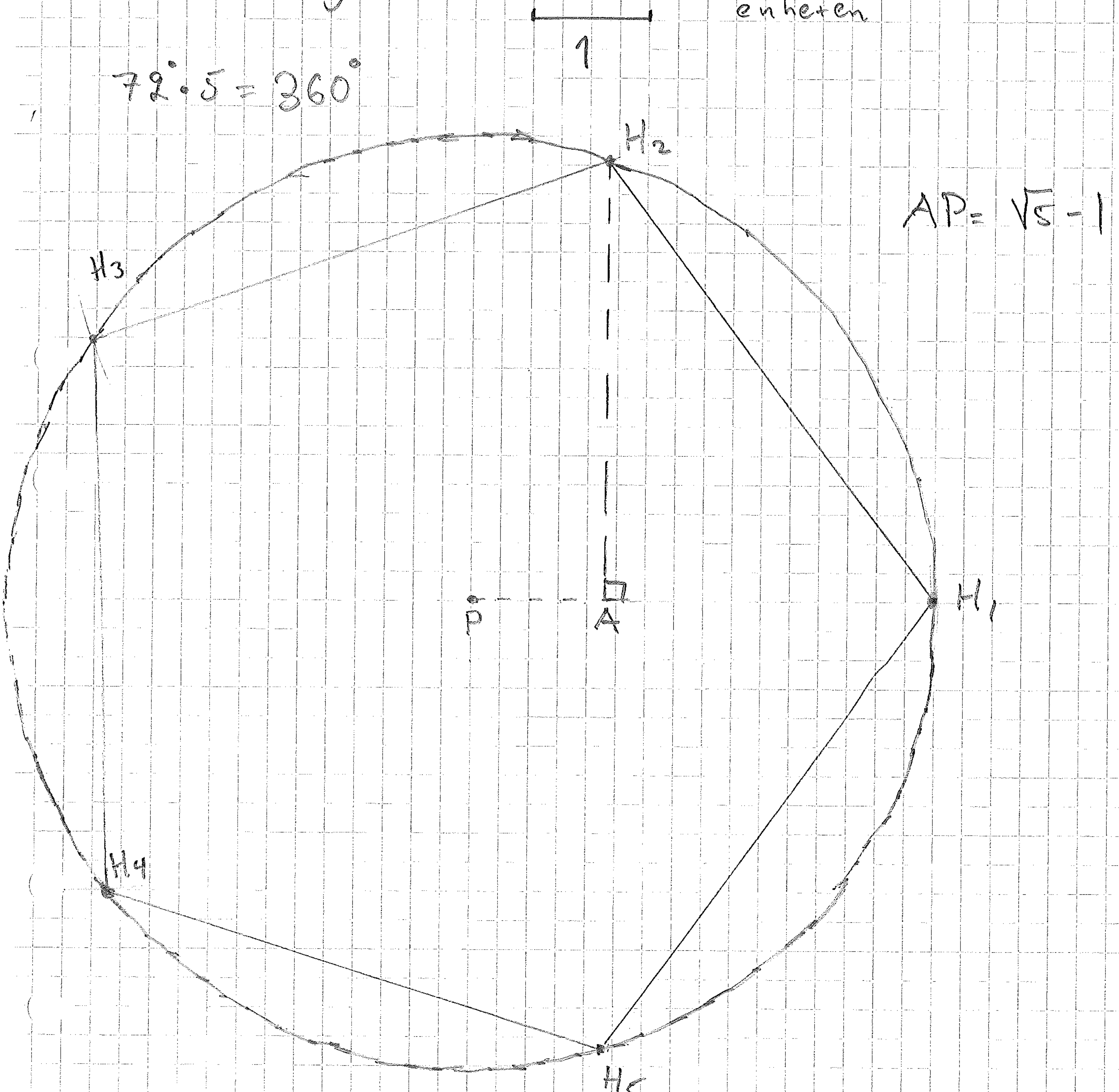
om $v = 60^\circ$ får vi

$$4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$$

Konstruktion av en regelbunden 5-hörning.

enheten

$72° \cdot 5 = 360°$



$\angle H_1 P H_2 = 72°$

Hur kommer man fram till $AP = \sqrt{5} - 1$?

Jo $AP = 4 \cos 72°$

och nu lite trigonometri ------

i) $\cos(2\cdot 72^\circ) = \cos 144^\circ = -\cos 36^\circ$

ii) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

iii) $2\left[\cos 2\cdot 72^\circ\right]^2 = 2\cdot(-\cos 36^\circ)^2 =$
$\cos 72^\circ + 1$

iv) $2\left[2(\cos 72^\circ)^2 - 1\right]^2 = \cos 72^\circ + 1$

v) sätt $X = 2\cos 72^\circ$

$$2\left[2\left(\frac{X}{2}\right)^2 - 1\right]^2 = \frac{X}{2} + 1$$

$$2\left[\frac{X^2}{2} - 1\right]^2 = \frac{X}{2} + 1$$

$$2\left[\frac{X^4}{4} - X^2 + 1\right] = \frac{X}{2} + 1$$

$$X^4 - 4X^2 + 4 = X + 2$$

$X_1 = 2$
$X_2 = -1$

$$X^4 - 4X^2 - X + 2 = 0$$

$$(X^2 - X - 2)\cdot\underbrace{(X^2 + X - 1)}_{=0} = 0$$

$X = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (gyllende snittet), $AP = \sqrt{5}-1$