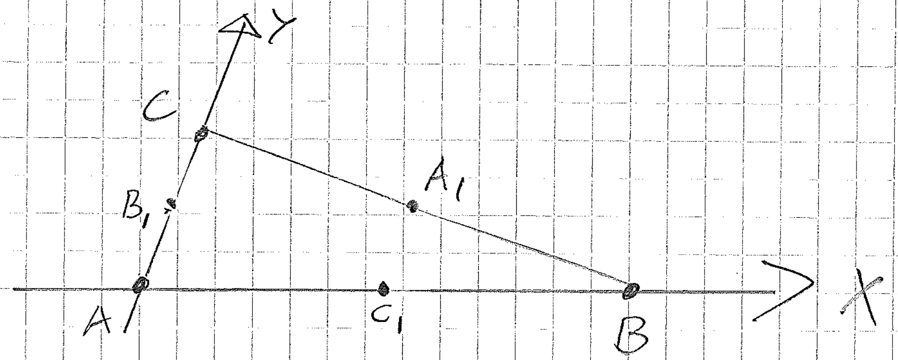
4. Geometri blir algebra (analytisk geometri)

Descartes, La Géométrie, 1637

Ex) Medianernas skärningspunkt



$A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$

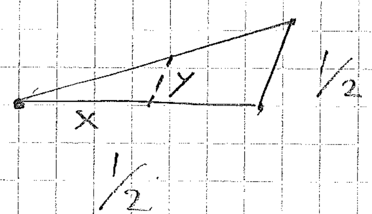
OBS! Koordinatsystemet behöver inte vara rätvinkligt och vi kan ha olika enheter i de två riktningarna.

Mittpunkterna på sidorna har koordinaterna

$A_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $B_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $C_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Dra nu linjerna AA_1 och CC_1. De har ekvationerna

$$AA_1: \quad \frac{y-0}{x-0} = \frac{\frac{1}{2}-0}{\frac{1}{2}-0} \iff y = x$$

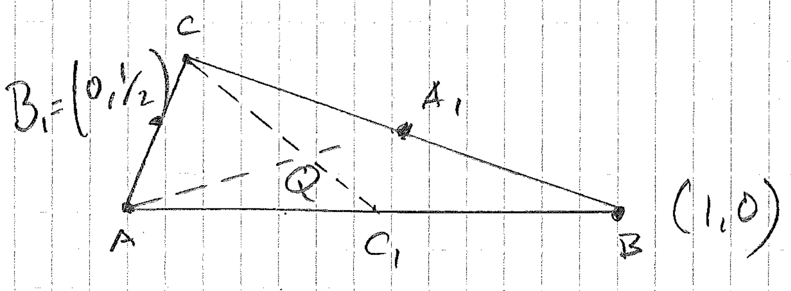


$CC_1: \quad \frac{y-1}{x-0} = \frac{0-1}{\frac{1}{2}-0} \iff y = 1-2x$

De två linjerna skär varandra i en punkt Q.

$$y = x = 1-2x \iff x = \tfrac{1}{3}$$

$$Q = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$



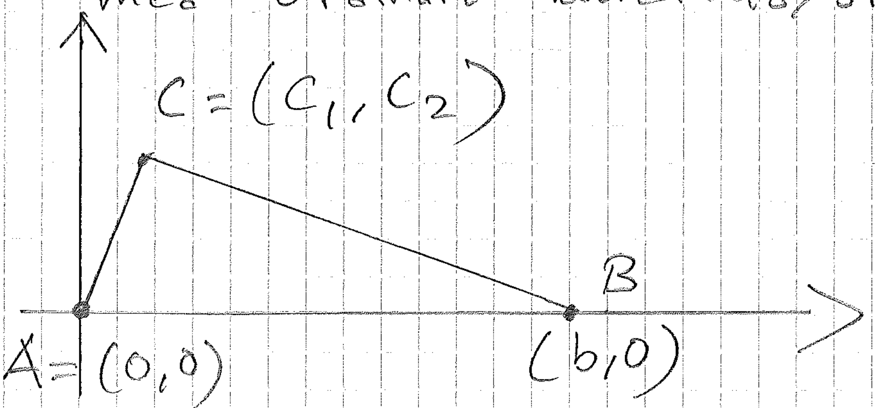
Ligger Q på BB_1?

I så fall är

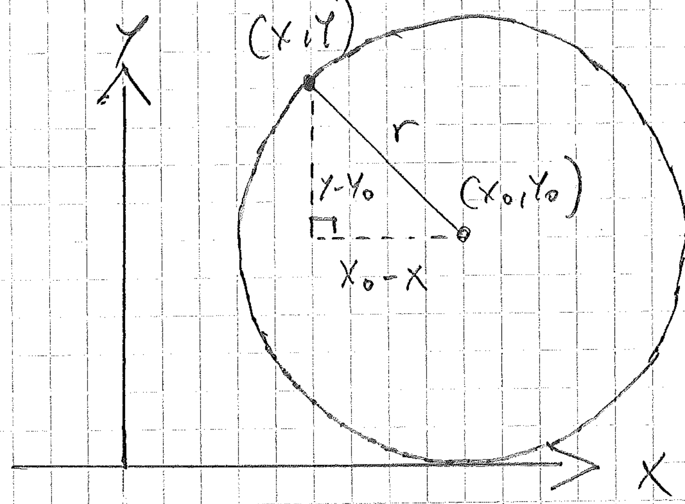
$$\frac{\frac{1}{3}-0}{\frac{1}{3}-1} = \frac{\frac{1}{2}-0}{0-1}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} \qquad \text{JA!}$$

Alternativt med ordinärt koordinatsystem.



Cirkelns ekvation



radie r

medelpunkt (x_0,y_0)

Pythagoras Sats ger nu att

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

* Ange radie och medelpunkt för cirkeln

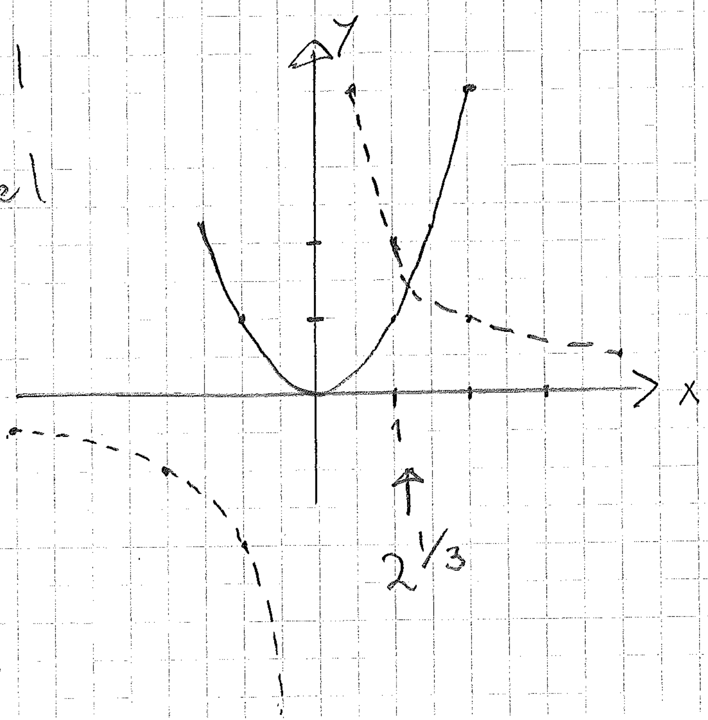
$$x^2+6x+y^2-4y=12.$$

De tre kägelsnitten

$y=x^2$ en parabel

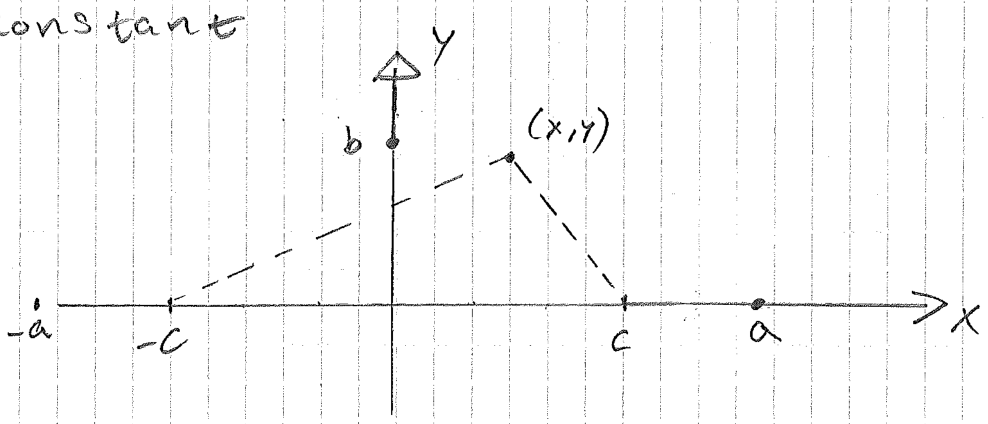
$xy=2$ en hyperbel

$$\frac{2}{x}=x^2 \iff x^3=2$$



SVAR: $r=5$, $(x_0,y_0)=(-3,2)$

Ellipsen fås från kravet att summan av avstånden till de två brännpunkterna $(c,0)$ och $(-c,0)$ skall vara konstant



$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2} = (a-c)+(a+c)$$
$$= 2a = 2\sqrt{b^2+c^2}$$

Efter två kvadreringar får man

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \quad \text{jfr} \quad \frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$$

Eccentricitet $e = c/a$, $0 \le e < 1$

Arean är πab.

Hyperbeln fås från kravet att skillnaden i avstånd till de två brännpunkterna skall vara konstant.

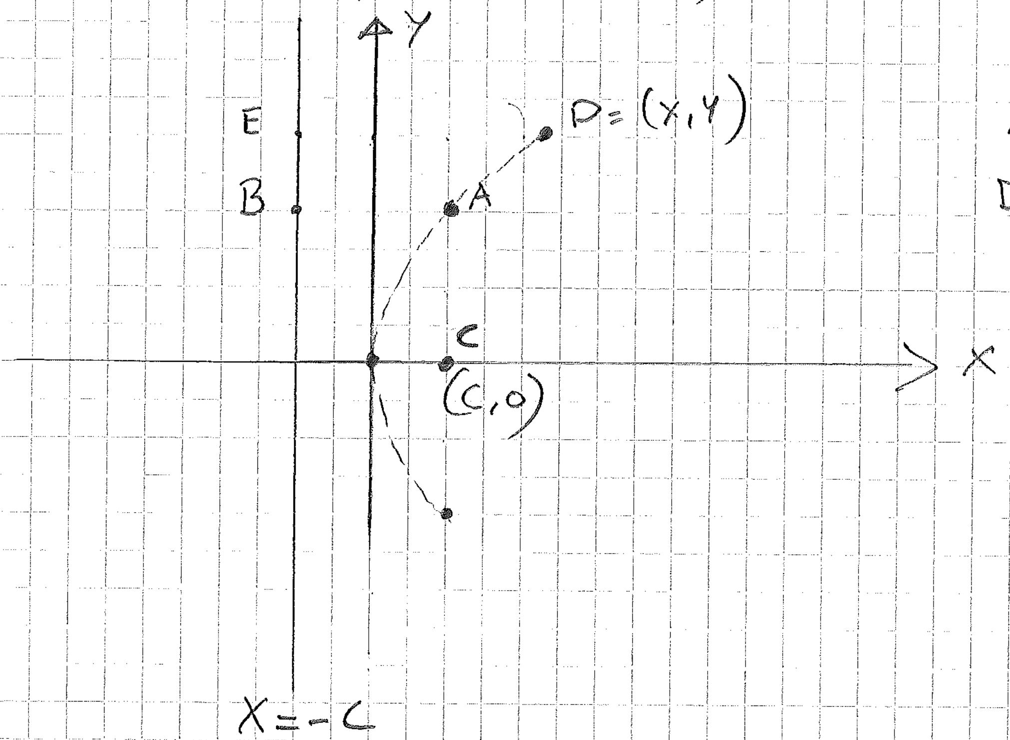
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = (a+c)-(c-a)$$
$$= 2a$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad b^2=c^2-a^2$$

Till sist

Parabeln fås från kravet att avståndet till en Styrlinje $x=-c$ skall vara lika med avståndet till en brännpunkt $(c,0)$



$AB = AC$

$DE = DC$

$DE = x+c$, $DC = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$$x+c = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

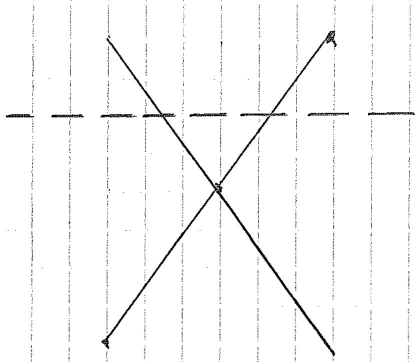
$$(x+c)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx = y^2$$

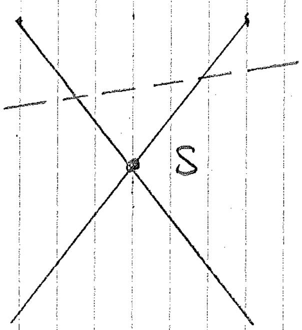
$$x = \frac{y^2}{4c}$$

med $c = 1/4$ får vi $x = y^2$.

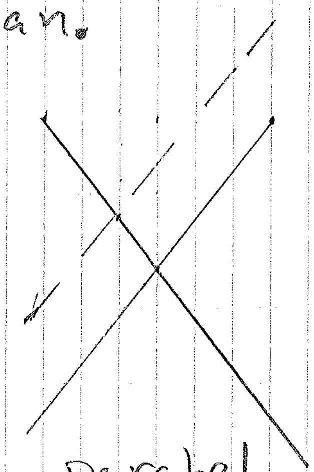
Ett kägelsnitt får vi när en dubbelkon som skärs av ett plan.



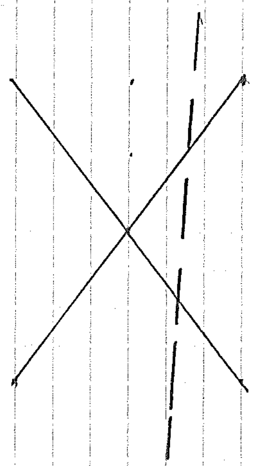
cirkel



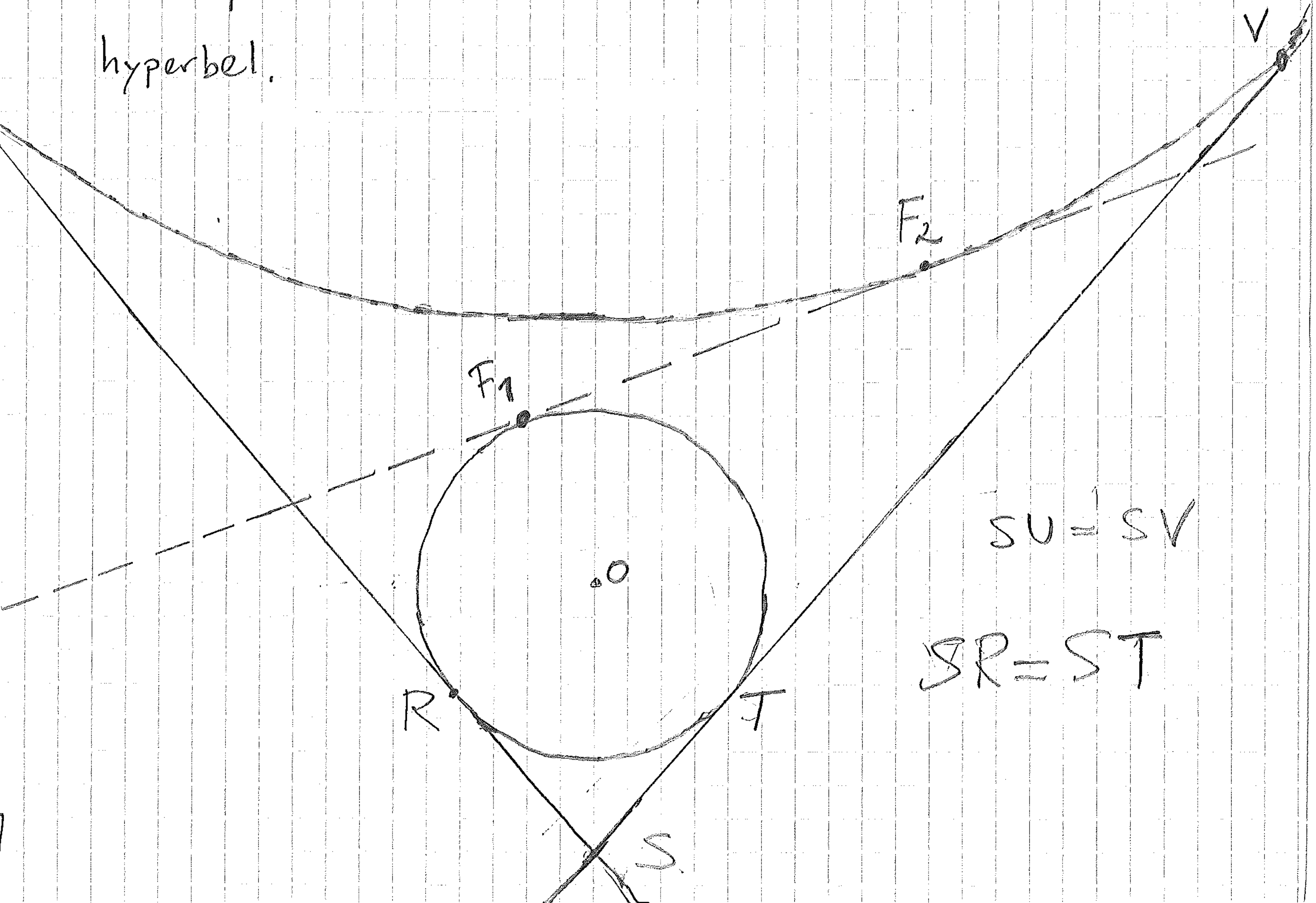
ellips



parabel

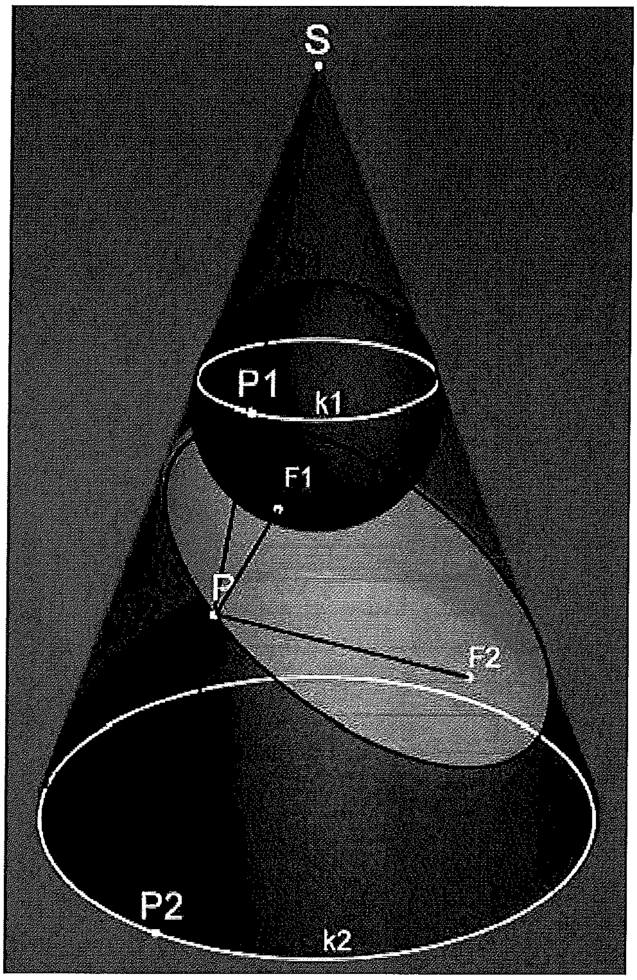


hyperbel.



SU = SV

SR = ST



P – en punkt på ellipsen.

P_1 och P_2 ligger på SP. P_1 på den lilla sfären och P_2 på den stora.

$PP_1 = PF_1$ eftersom båda linjerna tangerar lilla sfären.

pss för den stora sfären

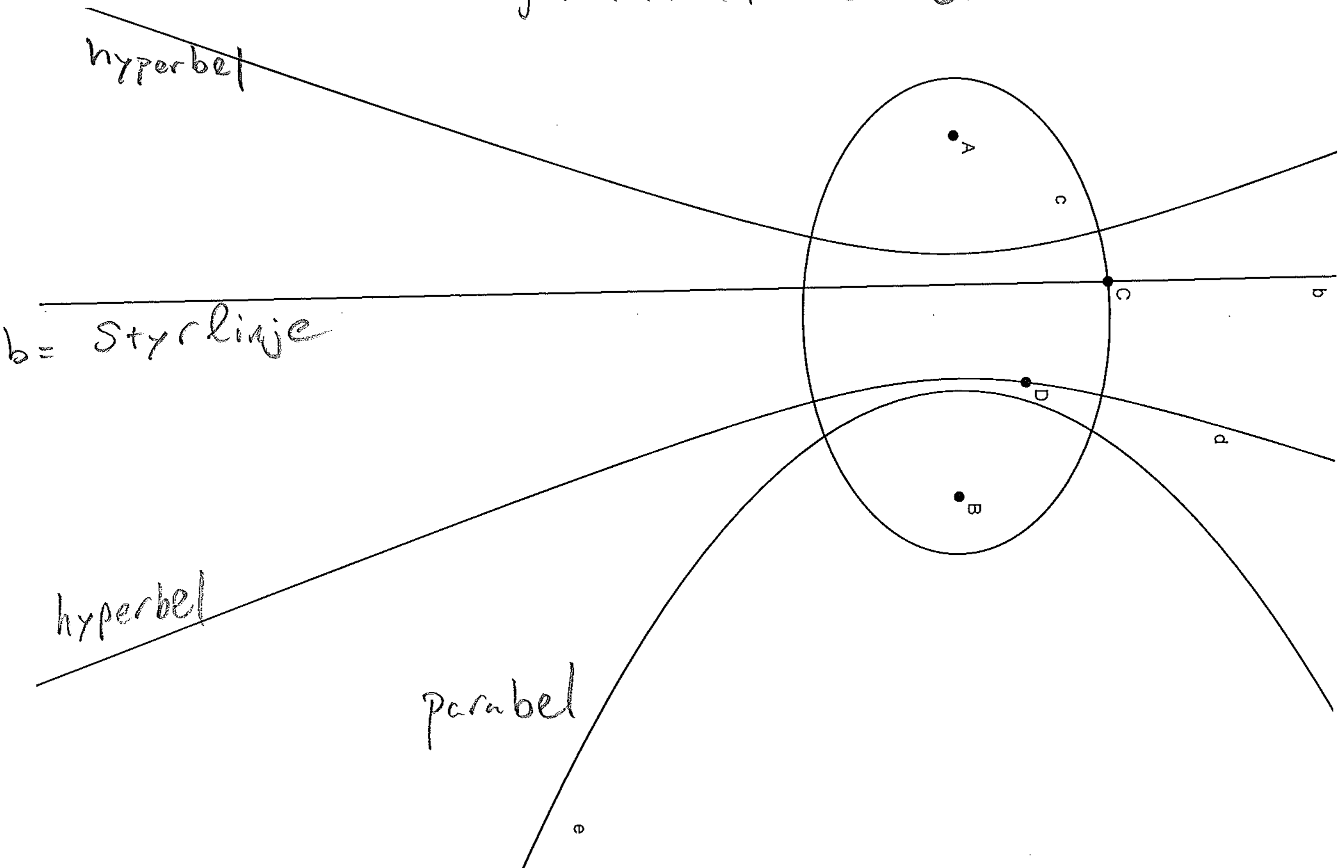
$$PF_2 = PP_2$$

SP_1 och SP_2 är konstant då vi flyttar P på ellipsen så $P_1P_2 = SP_2 - SP_1$ är konstant. Men

$$P_1P_2 = PP_1 + PP_2 = PF_1 + PF_2$$

Alltså är $PF_1 + PF_2$ konstant längs ellipsen.

De 3 kägelsnitten med GeoGebra.



A och B fokalpunkter för ellips och hyperbel.

Jag valde C som punkt på ellipsen och D som punkt på hyperbeln.

Som styrlinje för parabeln valde jag en linje genom C. Fokalpunkten valde jag till B för parabeln.