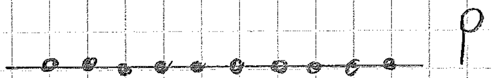
Lite mer om projektiv geometri.

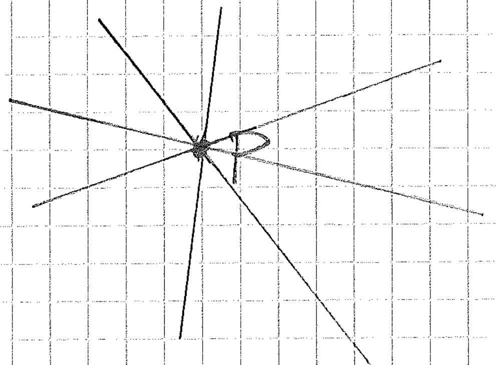
(efter A course in modern geometries av Judith N Lederberg).

Punktknippe
(pencil of points)



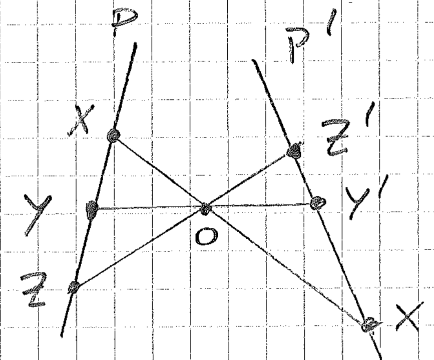
på linjen p

Linjeknippe
(pencil of lines)



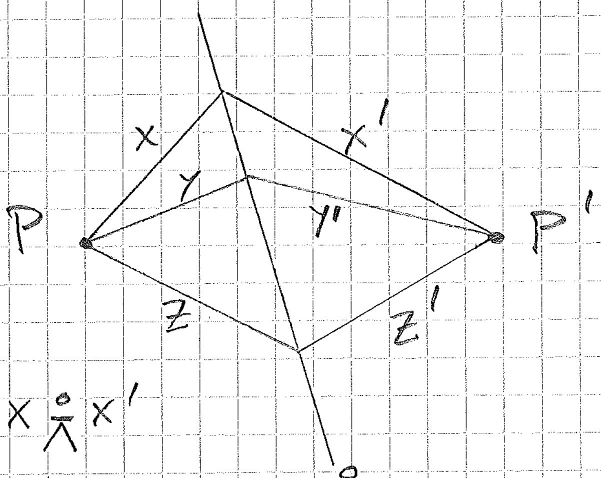
Med centrum P

Perspektiv avbildning mellan punktknippen



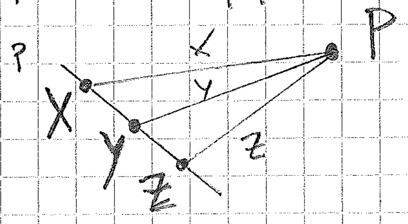
$X \overset{O}{\barwedge} X'$

Perspektiv avbildning mellan linjeknippen



$x \overset{o}{\barwedge} x'$

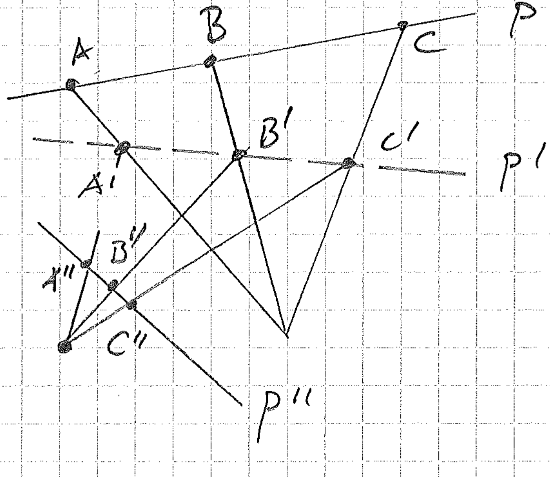
Perspektiv avbildning mellan linje- och punktknippen



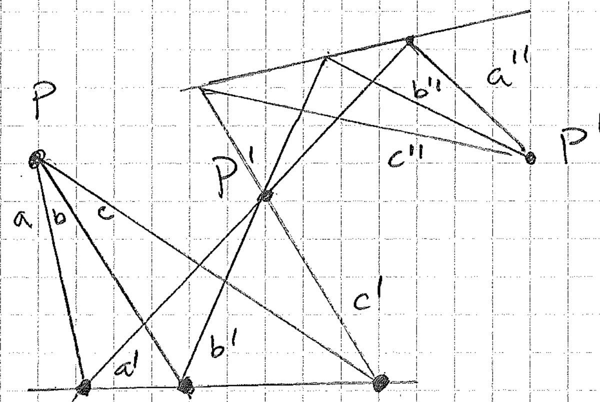
$X \barwedge x$

Räcker att veta var två element tar vägen för att avbilda alla andra.

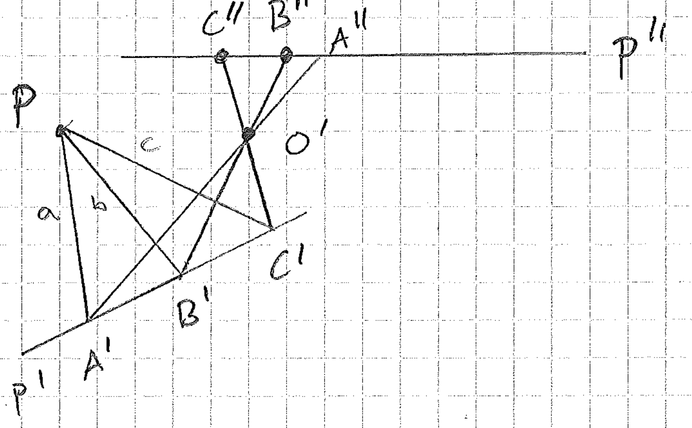
<u>Projektiva avbildningar</u> = en sammansättning av ett ändligt antal perspektiv avbildningar.



$ABC \wedge A''B''C''$



$abc \wedge a''b''c''$



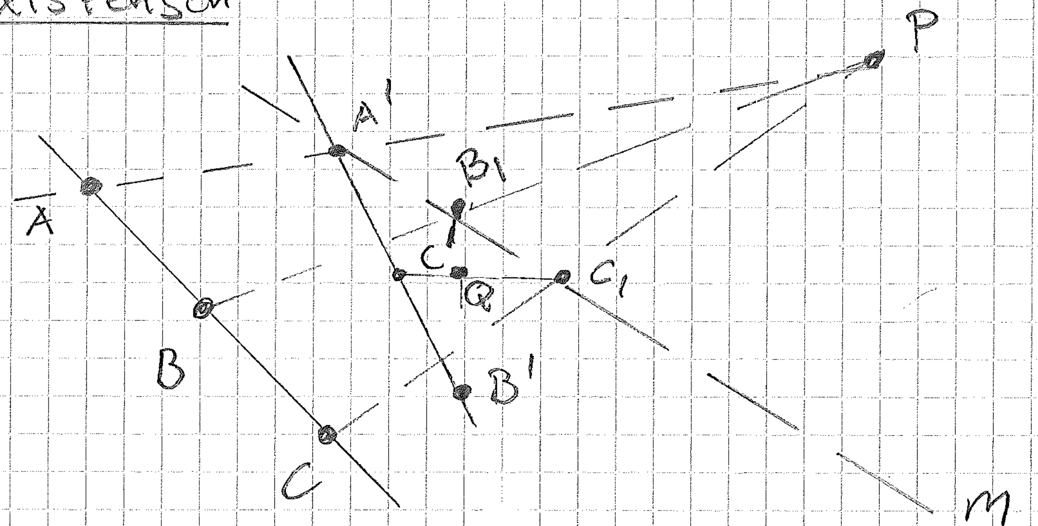
$abc \wedge A''B''C''$

Axiom 6: Om 3 punkter avbildas på sig själv under en projektiv avbildning så avbildas alla punkter på sig själva under denna avbildning.

Fundamentalsatsen: En projektiv avbildning mellan två knippen bestäms entydigt av tre par av motsvarande element.

Bevis för punktknippen

Existensen



1) $ABC \overset{P}{\barwedge} A'B_1C_1$

2) Välj $Q = B_1B' \cdot C_1C'$

$A'B_1C_1 \overset{Q}{\barwedge} A'B'C'$

Så $ABC \barwedge A'B'C'$

Entydigheten

Antag att det finns två olika projektiva avbildningar T och S som gör jobbet.

$T: ABC \to A'B'C'$

$S: ABC \to A'B'C'$

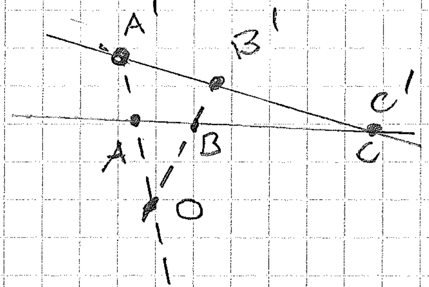
ST^{-1} gör då följande

$$A'B'C' \underset{T^{-1}}{\barwedge} ABC \underset{S}{\barwedge} A'B'C'$$

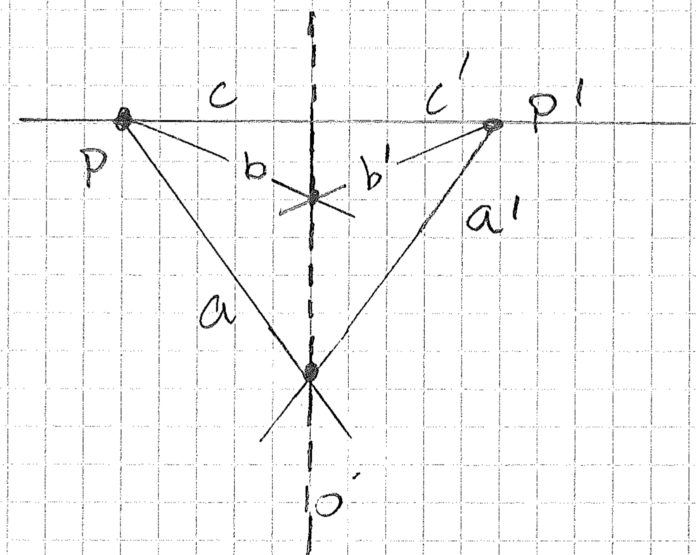
Nu kommer axiom 6 väl till pass!

S och T är samma avbildning!

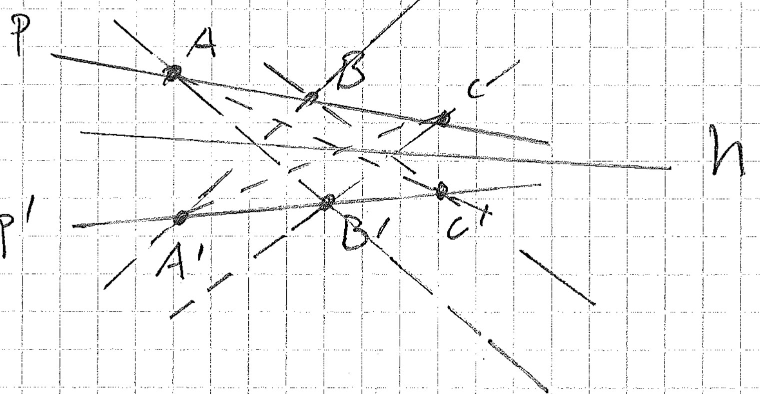
<u>Följdsats</u>. Om ett element i knippet avbildas på sig själv så är projektiva avbildningen en perspektiv avbildning.



För punkter



För linjer



"korslinjer" (Cross joins)

AB' och BA'

AC' och CA'

BC' och CB'

Alla korslinjer skär varandra på en linje, projektiva axeln

Gäller för $ABC \wedge A'B'C'$

<u>Bevis</u> $A'A, A'B, A'C \,\bar{\wedge}\, ABC$. En

i) perspektiv avbildning mellan linje- och punktknippe. A' perspektivcentrum

P.S.S $A'B'C' \,\bar{\wedge}\, AA', AB', AC'$
nu med A som centrum.

Nu sätter vi samman dem till en projektiv avbildning

$$A'A, A'B, A'C \wedge AA', AB', AC' \quad (*)$$

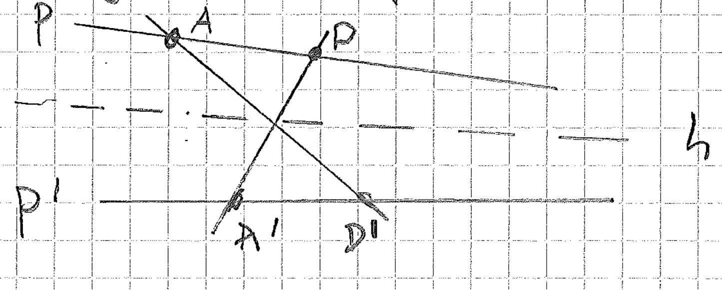
OBS! $ABC \wedge A'B'C'$ inkluderad här!

men $A'A$ och AA' är samma linje. Från följdsatsen på sidan 4 följer att $(*)$ är en perspektiv avbildning

$$A'A, A'B, A'C \overset{h}{\bar{\wedge}} AA', AB', AC'$$

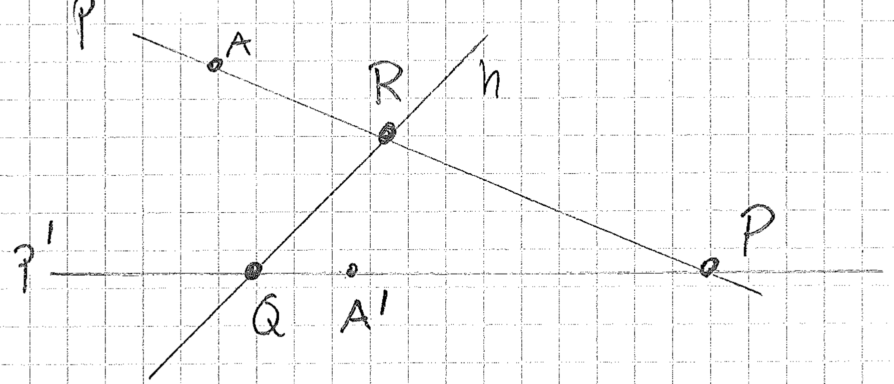
$A'B \cdot AB'$ ligger på h
$A'C \cdot AC'$ ligger på h

ii) Om h är given så kan man bestämma avbildningen av en fjärde punkt D



iii) Beror h på valet av perspektiv centrum? Vi valde A och A'.

Räcker att studera två punkter på h: $Q = h \cdot p'$, $R = h \cdot p$



$R \to P$ se steg ii ovan.

$P \to Q$

$R \neq Q$ för det är ingen perspektiv avbildning.

Enligt fundamentalsatsen är avbildningen $ABC \wedge A'B'C'$ entydigt bestämd. Så $h = RQ$ är entydigt bestämd