Linnéuniversitetet
Matematik
Hans Frisk

Uppgifter vecka 41, 2021, Geometri, 1MA113, 7,5 hp

Alla fem problemen handlar om modeller av hyperbolisk geometri (HG). I de två första uppgifterna använder vi Poincarés övre halvplan (PÖH). Alla punkter har y-koordinaten >0. Geodeten mellan två punkter A och B är den unika cirkelbåge som går genom de två punkterna och där cirkelcentrum ligger på x-axeln. x-axeln skall uppfattas som ∞ (oändligheten).Tänk dig det som en avgrund som du ser uppifrån. Avstånd som ser små ut nära x-axeln är i själva verket stora. Sådana förvrängningar ser vi också i kartboken, Afrika är cirka 14 gånger större än Grönland men i en traditionell atlas ser de ungefär lika stora ut.

De tre avslutande uppgifterna handlar om den modell av HG som kallas Poincarés cirkel (PC). Se länken: *Geodeter i Poincarés cirkelmodell* på Moodle. Jag refererar till artikeln i texten nedan. Alla punkter ligger innanför en cirkel, c, med radien r och centrum O. Geodeten mellan två punkter A och B är den unika cirkelbåge som går genom de två punkterna och som skär c under rät vinkel. Randen av c skall uppfattas som ∞ (oändligheten). Lär dig att invertera en punkt A i en cirkel (konstruktion 1.2). Sambandet mellan en punkt A och dess inverterade punkt A^{-1} är att $OA \cdot OA^{-1} = r^2$ där r betecknar cirkelns radie. Observera att alla geodeter genom O är diametrar.

När vi talar om vinklar i de två modellerna så menar vi vinklar mellan tangenterna.

1. Konstruera två geodeter, l_1 och l_2, i PÖH som inte skär varandra. Rita sedan en geodet m som skär både l_1 och l_2 och där alternatvinklarna är olika. Som tidigare ligger alternatvinklarna på var sin sida om m men denna gång är det alltså vinklar mellan tangenter i skärningspunkterna. Du har därmed visat att Euklides 29:e sats inte gäller i HG. Det var ju här han fick användning av sitt femte axiom som inte gäller i HG. Sats 27 gäller däremot också i HG. Den säger att om alternatvinklarna är lika så kan inte de två geodeterna skära varandra.

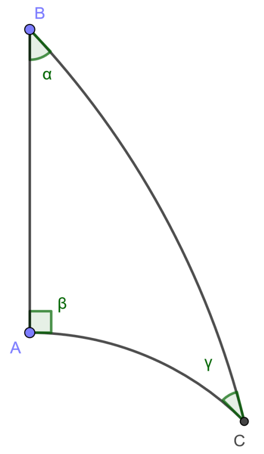
2. Beräkna vinkelsumman i en triangel i PÖH, se figur 1. En vinkel ges av vinkeln mellan tangenterna i punkten. $A = (0, 1), B = (0, 2)$ och C har koordinaterna $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Eftersom A och B har samma x-koordinat så blir geodeten en vertikal linje. Både A och C ligger på enhetscirkeln, $x^2 + y^2 = 1$. Så vinkeln β är rät. För att beräkna α behöver du finna medelpunkten för cirkelbågen BC. Kom ihåg cirkelns ekvation från kapitel 4 i kursboken, $(x - x_m)^2 + y^2 = r^2$, då medelpunkten ligger på x-axeln. Två obekanta, x_m och radien r, men du känner två punkter på cirkeln. Viktigt också att komma ihåg att en tangent till en cirkel alltid är vinkelrät mot radien till tangeringspunkten. För att beräkna vinkeln γ kan sinussatsen komma till användning.

3. Visa att en cirklel c_1 som går genom punkten A och dess inverterade punkt B är *ortogonal* mot cirkeln c med radien OP, se figur 2. Detta resultat behöver vi i nästa uppgift. Att två cirklar är ortogonala mot varandra innebär att vinkeln mellan tangenterna i skärningspunkten är 90 grader. Ledning: Använd randvinkelsatsen.

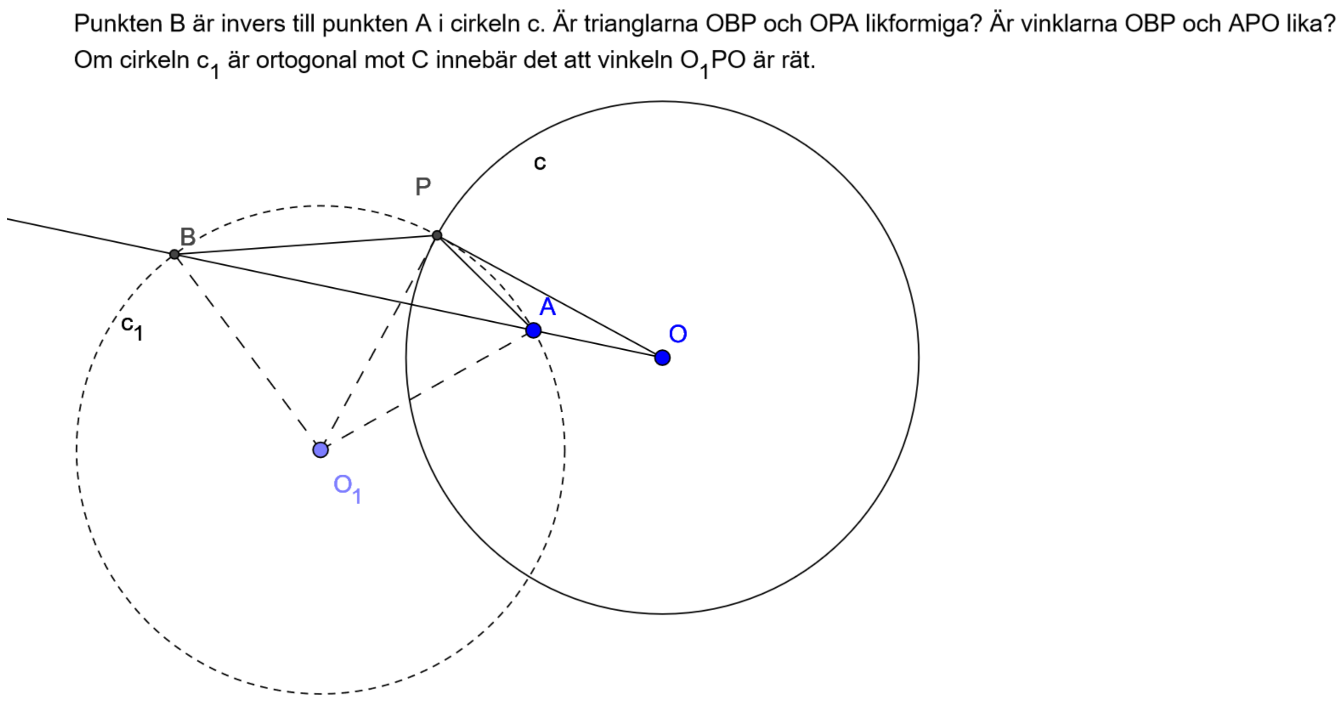
4. Givet två punkter A och B i PC som inte ligger på en diameter, finn geodeten genom de två punkterna (konstruktion 2.1). Förklara din konstruktion!

5. Konstruera en triangel ABC i PC med vinklarna $\pi/4, \pi/4$ och $\pi/4$. Välj centrum för cirkeln c som ett av hörnen (A) så två geodeter går längs diametrar. Återstår alltså den tredje

geodeten som måste vara en cirkelbåge. Låt hörnet B ligga på x-axeln med koordinaten b. Vi sätter $r = 1$ och då har den inverterade punkten $x = 1/b$. Cirkelbågen skall alltså skära de två diametrarna under vinkeln $\pi/4$. Sök en ekvation för b och lös den. Att $\tan \pi/8 = \sqrt{2} - 1$ kan komma till användning. Tips: Fokusera på den sökta cirkelbågens centrum. x-koordinaten får du från kravet att cirkeln skall vara ortogonal mot c. y-koordinaten får du från kravet att cirkeln skall gå genom B och vinkeln mellan tangent och x-axel skall vara $\pi/4$ där. Eftersom vinkeln skall vara $\pi/4$ även vid C så har vi en symmetrilinje. Den sökta triangeln är en likbent hyperbolisk triangel med vinkelsumman $3\pi/4$.



Figur 1: Beräkna $\alpha + \beta + \gamma$.



Figur 2: Visa att cirklarna är ortogonala mot varandra.