Linn*é*universitetet
Matematik
Hans Frisk

Uppgifter vecka 40, 2021, Geometri, 1MA113, 7,5 hp

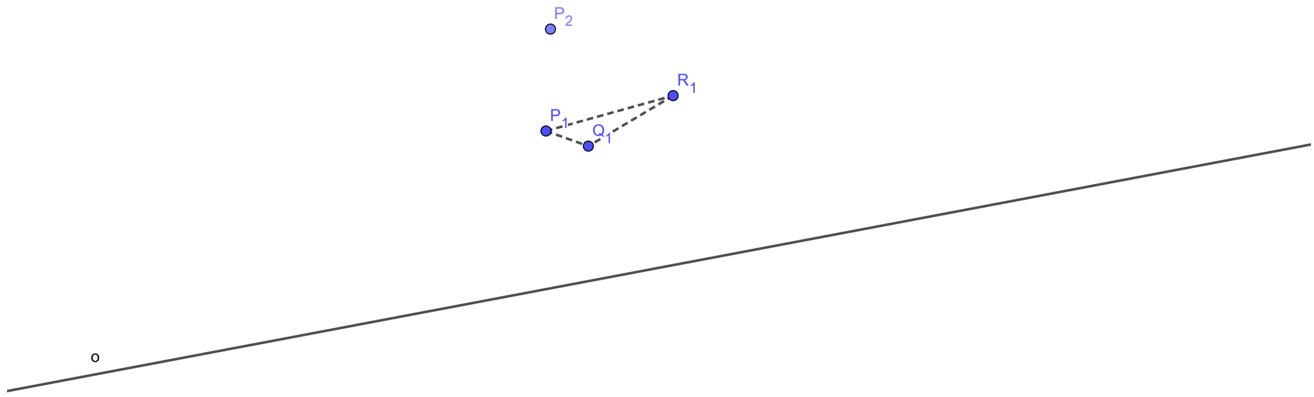
1. Om två trianglar $\Delta P_1Q_1R_1$ och $\Delta P_2Q_2R_2$ är perspektivistiska från en punkt O så är de också perspektivistiska från en linje o. Detta är Desargues sats som man brukar ta som ett axiom i två dimensioner (2D). (Se figur 5.11 för en figur i 3D.) Man kan sedan visa omvändningen, d.v.s. om de två trianglarna är perspektivistiska från en linje o så är de också perspektivistiska från en punkt O. Perspektivcentrum O kan ligga på eller utan utanför linjen o. I figur 1 så ligger den på linjen. Tyvärr har O, Q_2, R_2 råkat falla bort i figuren. Beskriv steg för steg hur du hittar de tre punkterna.

2. Perspektiva avbildningar kan sättas samman till projektiva avbildningar. Punkterna A, B, C på linjen p skall avbildas på A_1, B_1, C_1 på linjen q med hjälp av två perspektivavbildningar så att $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, se figur 2. Använd först A_1 som centrum och sedan A. I det mellanliggande steget skall alltså A, B, C avbildas på en linje r. Finn den linjen. Sätt ut de tre skärningspunkterna $r \cdot q = R$, $p \cdot q = P$ och $r \cdot p = S$. Hur avbildas S och P? Eftersom tre par av punkter entydigt bestämmer en projektivavbildning har du nu visat Pappus sats! Linjen r ändras alltså inte om man i stället tar till exempel B och B_1 som perspektivcentrum.

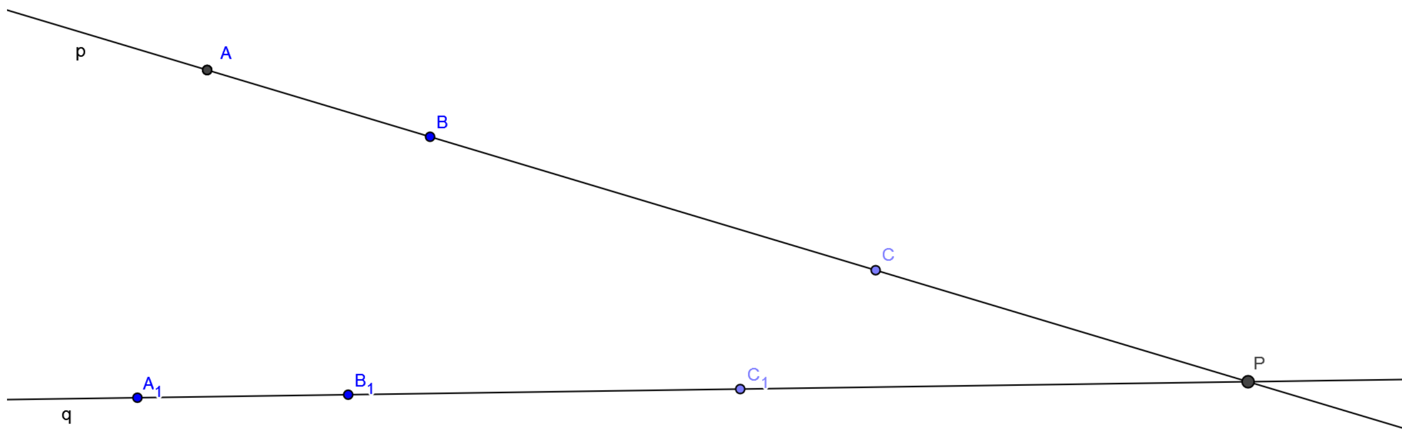
3. Fem punkter bestämmer ett kägelsnitt! Punkter A, B, C, A_1, B_1 ligger på ett kägelsnitt. Använd Pascals sats för att få fram en sjätte punkt (vilken som helst) C_1 på kägelsnittet. Du skall alltså konstruera en sjätte punkt på ellipsen (om det nu var en ellips som de fem punkterna låg på). Ledning: skicka ut en stråle från A. C_1 skall ligga på denna stråle. Du kan också välja en parabel eller hyperbel som kägelsnitt om du vill. Om du använder GeoGebra kan du konstruera en ellips och lägga punkterna på denna så har du också ett facit! Se figur 3.

4. Fem punkter D, A, E, B, C ligger på en rät linje (i den ordningen från vänster till höger). Finn en projektivavbildning sådan att $A \to D$, $B \to E$, $C \to C$. Två perspektivcentrum behövs. Observera att vid en perspektivavbildning från en linje till en annan flyttas ej skärningspunkten. C är alltså en fix punkt för din avbildning. Finns det någon mer fixpunkt?

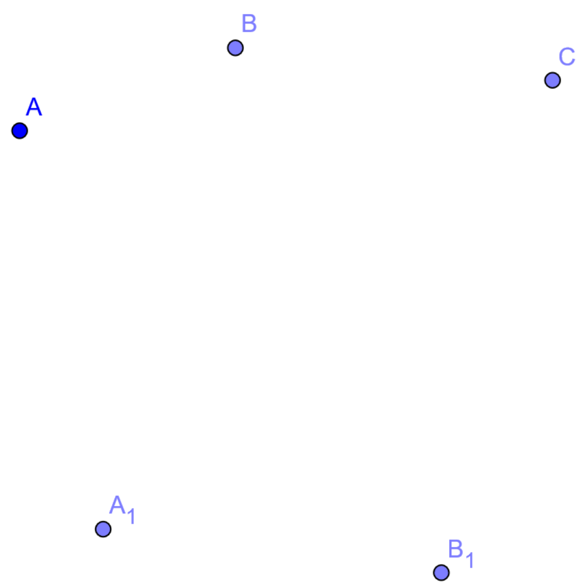
5. Tre punkter A, B, C på en linje p skall avbildas på samma linje p på sådant sätt att $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$. Då måste den projektiva avbildningen bestå av tre perspektivavbildningar. Gör en sådan konstruktion. Det behövs alltså tre perspektivcentrum (O_1, O_2, O_3) och två extra linjer (l_1, l_2). O_1 avbildar $p \to l_1$. O_2 avbildar $l_1 \to l_2$ och O_3 avbildar $l_2 \to p$ För vilken punkt X på p gäller att $X \to \infty$?



Figur 1: Finn O, Q_2 och R_2.



Figur 2: Projektivavbildning från linje p till linje q.



Figur 3: Finn en sjätte punkt C_1 på kägelsnittet.