Questions and Answers on Advanced Counting techniques. The numbers refer to 6:th edition of Rosen's book. Sorry no time for translating everything

Question on inclusion/exclusion on exam from 050303

Student: First is about question 3 about inclusion/ exclusion problem from March 3 , 2005. Where it asks how to find the number of integer solutions for equation

$$X+ Y+ Z= 15$$

with certain limitations for X, Y and Z (they must be smaller or equal to 5). Not sure how you get the C(17,15) combination first of all since adding all the possibility from 0 to 5, 6 and 7 adds up to 21 if you include 0 and if not zero you will have 18. Also not so clear about the other binary combinations. Such as C(4,2), C(3,1) and C(2,0)?

Teacher: No upper restrictions on x, y and z gives C(17,15) possibilities since there are 15 sticks and 2 plus signs.
Then you go on with x greater equal to 6 and so on. u+6=x gives a new problem with no upper restriction u+y+z=9 so this gives C(11,9). There are 3 of them. Finally if two of them are 6 or more we have 3 sticks to distribute. This can be done in C(5,2) ways. So the result must be C(17,15)-3C(11,9)+3C(5,2).

See page 3 on
http://homepage.lnu.se/staff/hfrmsi/1ma162/lecture7.pdf

S: The second question is from chapter 7 advance counting techniques lecture part II. Similar to above question but using generating functions technique. The problem is about finding e1+e2+e3= 17 cookies divided by three children with some restrictions that is hard to type here. Understand about how to set up the equations and how you "zip" it. But get confused about how you "unzip" it. Especially about the part on finding the coefficient using binary combinations I mean C(10,8), C(6,4) and 3.

T: I am using table 1 on p 489 (in 6th edition) expressing the functions as series. Here only for the denominator really. (1-x)^(-3) = 1+C(3,1)x + C(4,2)x^2+……. Polynomials are nice functions and more complicated functions like this one can be expressed as "polynomials of infinite degree"! The coefficients in these series expansions are chosen so the series is close to the function. In a second calculus course you will study Taylor expansions and then you learn how to get these coefficients. The rest of the problem is about how we can get x^17-terms. Three are 3 such terms and coefficients for them should be added.

7.1.23. Find a recurrence relation for the number of bit strings of length n that contain a pair consecutive 0s.

S: Förstår ej denna.

T: Knepig. Studera exempel 6 i texten. Dela upp strängarna av längd n i de som innehåller 00 och de som inte gör det. Skall det vara precis ett 00 par eller är 000 osv tillåtet? Om man tittar i facit så verkar det vara det sistnämnda som gäller.
Använd beteckningen b_n för de med 00 och a0_n för de som slutar på 0 och inte innehåller 00 . a1_n betecknar då de utan 00 som slutar på 1. Kan du då teckna ett uttryck för b_(n+1)? Glöm inte bort hur många strängar det finns totalt.

7.1.63

T: Using the definition above the problem we get a_n-2a_(n-1)+a_(n-2). This is the discrete counterpart to 2ond derivative. Applying the operation on 62ab gives zero. The second derivative is zero for a straight line.

7.2.7. In how many ways can a 2xn rectangular checkerboard be tiled using 1x2 and 2x2 pieces?

S: Förstår ej hur ser ut då bitarna läggs på tvären? Förstår ej hur man får fram det slutgiltiga uttrycket.

L: Har valt de som jag tyckte såg trevliga ut, inte alltid de lättaste :) Ja det handlar om RR. Börja med n=1,2,3 och försök se systematiken. På hur många sätt kan man skriva n som en summa av 1:or och 2:or är frågan. T.ex 4=1+1+1+1=2+1+1=1+2+1=1+1+2=2+2 alltså 5 sätt.
Nej det stämmer inte med facit som anger 11 då n=4. Man kan lägga bitarna på tvären också! Då får vi 5 möjlighter då n=3 och det stämmer med formeln i facit.
Låt b(n) beteckna antalet övertäckningar.
Hur många får vi från b_(n-1) och hur många får vi från b_(n-2)?
OBS undvik dubbelräkning av en lodrät 2x1 längst till höger!

7.2.3 e och g. Solve the recurence relations a_n=-4a_(n-1)-4a_(n-2) when a_0=0, a_1=1 and a_n=a_(n-2)/4 when a_0=1, a_1=0.

S: På e fick jag -1/2n(-2)^n och på g fick jag 1/2(1/2)^n + 1/2(-1/2)^n.
Det står inte så i facit. Har jag rätt ändå?

T: Kolla så initialvärdena stämmer. Sätt in din formel i RR och se om det stämmer.I e är det ju bara att använda potenslagen så ser du att det stämmer.

7.2.37. Let a_n be the sum of the first n triangular numbers. Show that a_n=a_(n-1)+(n*(n+1)/2). a_1=1. Solve the RR.

S:Är på gång men fastnar i algebran då jag ska lösa ut koefficienterna p0, p1, p2, p3. Hur göra på smidigaste sätt? Här tittade jag på ett exempel i boken (exempel 13). Jag fick alfa till ett och homogen lösning a blir då 1*1^n Provade sedan att anta en partikulär lösning; vet dock inte om ska ta en andragradsekvation eller tredjegradsekvation. När jag provade en tredjegradsekvation fastnade jag i allt för många termer och lyckades ej få ut koefficienterna p1, p2, p0.

T: Lurigt men det måste vara en tredjegradare. Se teorem 6. (1^n) är en lösning till homogena ekvationen. Naturligt att det skall vara grad 3 när differensen är av grad 2. OBS p0 försvinner. p1, p2 och p3 skall bestämmas. Du får ett ekvationssystem.

7.4.13. Determine the number of different ways 10 identical balloons can be given to 4 children if each children receives at least two balloons.

S: Denna gjorde jag genom att förenkla hela uttrycket och sedan lägga ihop koefficienterna. Känner på mig att det finns ett smidigare sätt, men förstår inte vilket. Ser inget uttryck i tabellen som passar.

T: G(x)= (x^2 + x^3 + x^4 +.......)^4. OBS man behöver inte stoppa vid x^10. Inte fel men ger lite krångligare räkningar.
G(x)=(x^2 / (1-x))^4 = x^8 (1-x)^(-4)= x^8 + ..+ C(5,2)x^10+......
Vänj dig vid tabellen med genererande funktioner.

7.4.23. What is the generating function for {a_k} where a_k is the number of solutions of x_1+x_2+x_3=k. Here x_1 is greater equal to 2. x_2 lies between 0 and 3 and x_3 between 2 and 5. All three are integers.

S: Förstår ej hur man får fram den genererande funktionen?

T: Från x1 blir bidraget till GF   (x^2 + x^3 + x^4 +……..) , en geometrisk serie som blir (x^2)/(1-x)
Från x2 blir bidraget till GF 1+x+x^2 +x^3, en geometrisk summa som blir (1-x^4)/(1-x)
Från x3 blir bidraget till GF x^2 gånger bidraget från x2.
I facit har man inte omformat summan som jag gjort här.
På mitt sätt blir GF=x^4 (1-x^4)^2 ((1-x)^-3
Sedan får du använda nionde raden i tabellen (n=3) och eftersom det frågas efter koefficienten framför x^6 så är det x^2 termen i serieutvecklingen vi söker. Vi har ju redan x^4 i täljaren. C(3+1,2)=6.

7.6.5. Find the number of primes less than 200 using inclusion-exclusion principle.

S: Denna höll jag nog på med i en timme. Tillslut fick jag ut 46 men kom sedan på att jag skulle lägga till 6 st primtal och då stämde det inte längre. Jag hade 199 från början. Drog bort 100, 66,40,28,18,15 och fick -68 kvar.
Sedan lade jag till 33,20,14,9,7,13,9,6,5,5,3,3,2,2,1 och fick då 64.
Sedan drog jag bort 6,4,3,2,1,1,1 och fick 46.
Stämmer det att man först drar bort (p), sedan lägger till (PP), drar bort (PPP), lägger till (PPPP), drar bort (PPPPP), lägger till (PPPPPP). När det blir PPPP blir kvoten 200/PPPP så liten så det blir 0.

T: See the sieve Eratosthenes on page 507. You must go up to p=13.

8.1.3 in 7th edition. In how many ways can you pay n pesos with coins and/or bills of 1, 2, 5, 10, 20, 50 and 100 pesos? Order matters!

S: Jag lyckades inte lösa uppgiften 8.1.3 och inte ens när jag tittar i facit förstår jag hur det är tänkt. För det första så står det i svarsformeln bland annat a med index (n-100). Om n = 1 så blir förstås det ett index -99. Jag antar, utan att vara helt säker, att när ett index blir negativt så räknas inte den termen. Är det riktigt?
Vidare, om jag försöker räkna fram svaret till uppgift 8:1.3b med hjälp av formeln så går jag på pumpen redan vid n = 2, alltså om jag skall betala 2 pesos. I verkligheten skulle jag kunna betala det på 2 sätt, antingen genom två 1-pesos eller genom två 2-pesos.
Om jag skall räkna ut a2 och sätter a1 = 1 (eftersom något som kostar 1 peso bara kan betalas med ett 1-pesos mynt).

a1 = 1
a2 = a2-1 = a1 = 1

Men a2 måste ju vara 2, enligt resonemanget tidigare, och därför börjar jag funderar över om jag förstått det här.

T: $a_1=1$ and $a_2=2$ (1+1 or 2) as you say. Moreover $a_3 =3$ (1+1+1, 2+1, 1+2) and $a_4=5$ (1+1+1+1+1, 2+1+1, 1+2+1, 1+1+2, 2+2). So in the beginning you just add the two previous numbers to get the new. Your last coin can be 2 or 1. When we come to five pesos it becomes more complicated. Besides the 5+3 possibilities we can also pay with one 5 pesos coin so I found 9 possibilities. The RR given in the book is $a_n=a_{(n-1)} + a_{(n-2)} + 2a_{(n-5)} +\ldots..$ but we can stop at n-5 since 10 and higher coins/bills cannot be used for the moment. So $a_j=0$ when j is negative. But what about a_0? To get it right for n=2 we have to put $a_0=1$ but then we get $a_5=10$ which is wrong. To solve this contradiction I think the factor 2's should be removed in the RR. For example then $a_6=a_5 + a_4 + a_1 = 9+5+1=15$ (you can end with 1, 2 or 5 pesos) which is correct.

Then $a_{17}=a_{16}+a_{15}+a_{12}+a_7$. It takes some time to get the number!