24/2 2002

$$Icke - linjära\ differensekvationer$$

För att vidga vyerna utöver det vi sett i kapitel 10 så skall jag här säga något om icke-linjära differensekvationer på *begränsat* intervall. Vi har en startpunkt $x_0 \in I$ (ett begränsat intervall) och en differensekvation

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

, där $f(x_n)$ nu är en icke-linjär funktion sådan att $x_{n+1} \in I$ då $x_n \in I$. Under dessa omständigheter kan sk kaos uppkomma. Kaos har varit ett populärt begrepp de senaste årtionderna men forskarna har aldrig kunnat enats om en definition av vad kaos är. Vi säger att fullständigt kaos råder då alla *periodiska banor* är *instabila* (definitioner av dessa två begrepp följer nedan). Som ni förstått från kapitel 10 är teorin för differensekvationer och differentialekvationer intimt förknippade med varandra. Det gäller även för de kaotiska systemen. Kvalitativt sett är det ingen skillnad mellan differens- och differentialekvationer. Kaosforskningen drog i gång på allvar på 1960-talet men redan på 1940-talet hade man inom datalogin funderat över vad kaos är för något, nämligen i samband med utvecklingen av effektiva slumptals-generatorer (se nedan). Låt oss nu titta på några icke-linjära ekvationer mer i detalj.

Ensidigt skift:

$$x_{n+1} = 2x_n \bmod 1, \qquad x_0 \in [0, 1].$$

Enklast att förstå vad som händer är att utveckla x_0 i det binära talsystemet. Ta t ex $x_0 = 2/3$ som har den binära decimalutvecklingen

$$x_0 = 0.1010101010..... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}........$$

, periodisk decimalutveckling som det skall vara för rationella (bråk) tal. För att få x_1 så skall vi alltså multiplicera med 2 och sedan dra ifrån det som överstiger 1. Vi får då

$$x_1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6}........ = 0.0101010101......$$

eller 1/3 i tiosystemet. Vad som hände var faktiskt att vi flyttade decimalpunkten ett steg till höger och det är det som sker vid varje iteration (förklarar namnet på avbildningen), alltså

$$x_2 = 0.1010101010..... = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}........$$

och vi är tillbaks till utgångspunkten x_0. Vi har här sett ett exempel på en *periodisk bana* av längd 2.

Det som gör att sådana här system kan kallas kaotiska är att små initiala skillnader snabbt

, efter relativt få iterationer, ger upphov till stora skillnader. Säg att jag är osäker på den 9:e decimalen i min binära uteckling

$$x_0 = 0.110001111??????...............$$

vilket kan bero på mätfel eller att jag jobbar på en datormaskin med begränsad precision. Efter endast 9 iterationer har denna lilla osäkerhet vuxit till något dramatiskt

$$x_9 = 0.????????..............................$$

, jag vet ingenting!

Vad man kan göra för att förstå sådana dynamiska system är att ha koll på de periodiska banorna och deras stabilitet. Periodiska banorna utgör ett ”skelett” för alla annan rörelse. Periodiska banor av längd 1 kallas för *fixpunkter,* alltså lösningar till ekvationen $x = f(x)$, låt oss beteckna dem med x^*. Vilka är de för det ensidiga skiftet? Man kan grafiskt få en känsla för fixpunkternas stabilitet genom att iterera i figur nära x^*. Försök göra detta. Stabilitet handlar alltså om små initiala skillnader växer, avtar eller är ungefär de samma med ökat antal iterationer. Matematiskt hänger det på om $\mid f'(x^*) \mid > 1$ (instabil fixpunkt) eller < 1 (stabil fixpunkt). Likhet kräver mer detaljerat studium. Är fixpunkterna för det ensidiga skiftet stabila eller instabila?

För att sedan gå vidare med periodiska banor av längd 2 så söker man fixpunkter till $f(f(x))$. Rötterna till denna ekvation är förutom fixpunkterna till $f(x)$ den verkliga period 2 banan. Kalla de båda punkterna som ingår i banan för p och q. Vi såg ovan att $p = 1/3$ och $q = 2/3$ för vårt ensidiga skift. Stabiliteten för en periodisk bana avgörs pss som för fixpunkter. Med hjälp av kedjeregeln får vi att det handlar om

$$\mid f'(p) \cdot f'(q) \mid$$

är större eller mindre än 1.

Några avslutande frågor. Vilka genuina periodiska banor av längd 3 finns det?
Hur växer antalet periodiska banor med periodlängden?
Finns det några stabila periodiska banor för vårt skift?

Pseudo-slumptalsgenerator*:* I alla datorspråk finns ett kommando RAN eller liknande som spottar ut ett tal mellan 0 och 1, tillsynes slumpmässigt. Hur går det till? Jag tycker det är viktigt att poängtera att det rör sig om pseudo-slumptal (alltså de ser ut som slumptal men är det inte). I själva verket genereras de av en fullständigt deterministisk algoritm, dvs för givet initialvärde är utfallet entydigt bestämt. Kan man emellertid få algoritmen tillräckligt olinjär så att små initiala skillnader snabbt växer med antalet iterationer ja då blir ju i praktiken utfallen slumptal. En algoritm som brukar användas är just ett ensidigt skift

$$x_{n+1} = 16807 x_n \bmod 1$$

där x_0, och därmed alla x_n, är begränsad till mängden

$$\frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, ..., \frac{m-1}{m}$$

där $m = 2^{31} - 1$ vilket är ett stort primtal. Hur många gånger denna brukar itereras vet jag ej. Initialvärdet x_0 ges av klockangivelsen.

Logistiska avbildningen. En mycket studerad avbildning är

$$x_{n+1} = \mu \cdot x_n \cdot (1 - x_n), \quad x_0 \in [0,1]$$

där μ är ett fixt reellt tal mellan 0 och 4. Med detta val av μ så kommer alla $x_n \in [0,1]$. Vad gör avbildningen så intressant är att är att man kan studera en övergång från ordning till kaos när μ ökar. Man kan visa att för $\mu = 4$ är även denna avbldning ett ensidigt skift.

Några uppgifter. Finn för givet μ fixpunkterna. För vilka μ är de instabila/stabila? Gå vidare och försök finna den periodiska banan av längd 2. För vilket μ ”föds” den ? (En sådan händelse kallas för en bifurkation). När blir den instabil? Vad vi börjar se här är det sk perioddubblings-scenariot för hur kaos uppkommer.

Tältavbildningen. En sista avbildning du kan studera som i exempeln ovan är

$$x_{n+1} = \begin{cases} 2x_n, & 0 \le x_n \le \frac{1}{2} \\ 2(1 - x_n), & \frac{1}{2} < x_n \le 1. \end{cases}$$

Återigen håller vi oss hela tiden till intervallet $[0,1]$ om x_0 gör det.