Vektorgeometri för gymnasister

Per-Anders Svensson

`http://homepage.lnu.se/staff/psvmsi/vektorgeometri/gymnasiet.html`

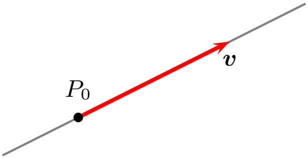
Fakulteten för teknik
Linnéuniversitetet

Räta linjens och planets ekvationer III

Innehåll

Repetition: Räta linjer och plan i rummet

I ett givet koordinatsystem $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z)$ för rummet så beskrivs den räta linje, som går genom punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och som har $\boldsymbol{v} = (\alpha, \beta, \gamma) \neq \mathbf{0}$ som riktningsvektor, av ekvationen



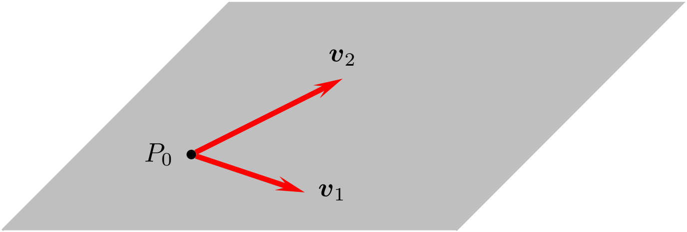
$$\begin{cases} x = x_0 + t\alpha \\ y = y_0 + t\beta \\ z = z_0 + t\gamma. \end{cases}$$

Här är t en *parameter*, som kan anta vilket värde som helst (bland de reella talen); när t varierar, så varierar x, y och z på så vis, att punkten $P = (x, y, z)$ hela tiden ligger på linjen ifråga.

Det plan som innehåller punkten $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ och som spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ har på parameterform ekvationen

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2 \\ y = y_0 + \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 \\ z = z_0 + \gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2. \end{cases}$$

När parametrarna t_1 och t_2 varierar bland alla reella tal, kommer x, y och z variera på så vis, att punkten $P = (x, y, z)$ hela tiden kommer att ligga i planet.

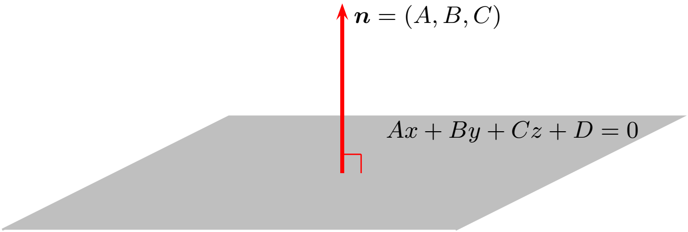


Ekvationen för ett plan kan också skrivas på *normalform*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

för några reella tal A, B, C och D, där minst ett av talen A, B och C är skilt från noll.

Om det koordinatsystem som används är ortonormerat, så har vektorn $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ egenskapen att vara *normalvektor* till ett plan med ekvationen (1). Med detta menas att $\boldsymbol{n}$ är ortogonal mot varje vektor som är parallell med planet. (Litet slarvigt uttryckt: $\boldsymbol{n}$ är vinkelrät mot planet.)



Vi kommer närmast att titta på några typiska räkneexempel på plan och räta linjer i rummet. Närmare bestämt ska vi kika på hur man kan

(i) bestämma en eventuell skärningspunkt mellan en rät linje och ett plan

(ii) bestämma skärningen mellan två (eller flera) plan

(iii) bestämma kortaste avståndet mellan en punkt och ett plan

(iv) bestämma kortaste avståndet mellan två räta linjer.

För att kunna lösa problem av typen (iii) och (iv) avkrävs att koordinatsystemet är ortonormerat. Problem av typen (i) och (ii) kan lösas även när så inte är fallet.

Skärningspunkt mellan rät linje och plan

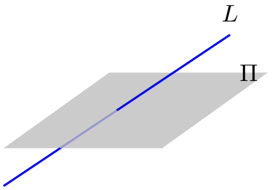
Exempel

Vi söker en eventuell skärningspunkt mellan det plan Π, som på normalform har ekvationen $x - 2y + 3z - 5 = 0$, och den räta linjen

$$L\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = 2 - 3t. \end{cases}$$

Lösning.

När t varierar, förflyttar sig punkten $P = (1+t, t, 2-3t)$ utmed L. Vi söker det värde på t som gör att P hamnar i Π, d.v.s. så att P:s koordinater uppfyller planets ekvation:



$$(1+t) - 2t + 3(2-3t) - 5 = 0 \iff -10t + 2 = 0 \iff t = \frac{1}{5}.$$

För $t = 1/5$ blir $P = (1+t, t, 2-3t) = (6/5, 1/5, 7/5)$, vilket är den sökta skärningspunkten. $\square$

Exempel

Vi ska bestämma den eventuella skärningspunkten mellan följande räta linje och plan:

$$L\colon \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad \Pi\colon \begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = 4 + 2t_1 - t_2 \\ z = -1 - 3t_1 + 7t_2. \end{cases}$$

En godtycklig punkt på L är på formen $P = (-1 + 3t, 2 + 3t, 3 + 2t)$ för något t, medan en godtycklig punkt i Π är på formen $Q = (t_1 + t_2, 4 + 2t_1 - t_2, -1 - 3t_1 + 7t_2)$ för något val av t_1 och t_2. Vi söker värden på t, t_1 och t_2 så att $P = Q$. Detta leder till

$$\begin{cases} -1 + 3t = t_1 + t_2 \\ 2 + 3t = 4 + 2t_1 - t_2 \\ 3 + 2t = -1 - 3t_1 + 7t_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t - t_1 - t_2 = 1 \\ 3t - 2t_1 + t_2 = 2 \\ 2t + 3t_1 - 7t_2 = -4 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} t = -1 \\ t_1 = -3 \\ t_2 = -1. \end{cases}$$

Genom att antingen sätta $t = -1$ i ekvationen för L: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

eller $t_1 = -3$ och $t_2 = -1$ i ekvationen för Π: $\begin{cases} x = t_1 + t_2 \\ y = 4 + 2t_1 - t_2 \\ z = -1 - 3t_2 + 7t_2, \end{cases}$

får vi att den gemensamma skärningspunkten ges av $(x, y, z) = (-4, -1, 1)$.

Alternativ lösning. Vi skriver först om ekvationen för Π till normalform. Planet spänns upp av vektorerna $\boldsymbol{v}_1 = (1, 2, -3)$ och $\boldsymbol{v}_2 = (1, -1, 7)$ och innehåller punkten $P_0 = (0, 4, -1)$. Punkten $R = (x, y, z)$ ligger i Π, om och endast om vektorerna $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ och $\overrightarrow{P_0R} = (x, y - 4, z + 1)$ är linjärt beroende, vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & -1 & y-4 \\ -3 & 7 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \iff 11x - 10y - 3z + 37 = 0.$$

Vi söker sedan skärningspunkten mellan L och Π på samma sätt som i föregående exempel; punkten $P = (-1 + 3t, 2 + 3t, 3 + 2t)$ ligger i Π, om och endast om P uppfyller ekvationen $11x - 10y - 3z + 37 = 0$:

$$11(-1 + 3t) - 10(2 + 3t) - 3(3 + 2t) + 37 = 0 \iff t = -1.$$

Genom att sätta $t = -1$ i ekvationen för L får vi på nytt skärningspunkten $(-4, -1, 1)$.

Exempel

När vi på samma sätt som tidigare försöker finna skärningspunkten mellan den räta linjen $(x, y, z) = (3 + 4t, 1 - t, 2 + 2t)$ och planet $x + 2y - z - 1 = 0$, så leder detta till ekvationen

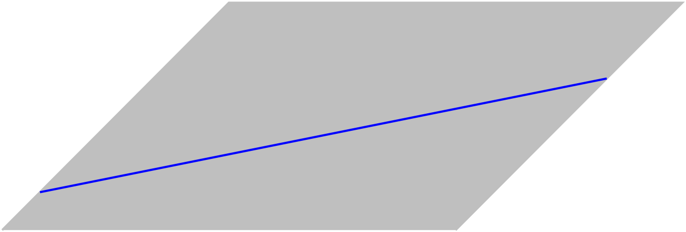
$$(3 + 4t) + 2(1 - t) - (2 + 2t) - 1 = 0 \iff 2 = 0.$$

Det finns inget värde på t som ger en skärningspunkt; planet och linjen saknar gemensamma punkter.

Om vi istället söker skärningspunkten mellan planet $3x + 2y - 5z - 1 = 0$ och samma linje $(x, y, z) = (3 + 4t, 1 - t, 2 + 2t)$ som ovan, så får vi

$$3(3 + 4t) + 2(1 - t) - 5(2 + 2t) - 1 = 0 \iff 0 = 0.$$

Punkten $(3 + 4t, 1 - t, 2 + 2t)$ uppfyller planets ekvation, för samtliga värden på t. Alla punkter på linjen ligger alltså även i planet.



Skärning mellan plan

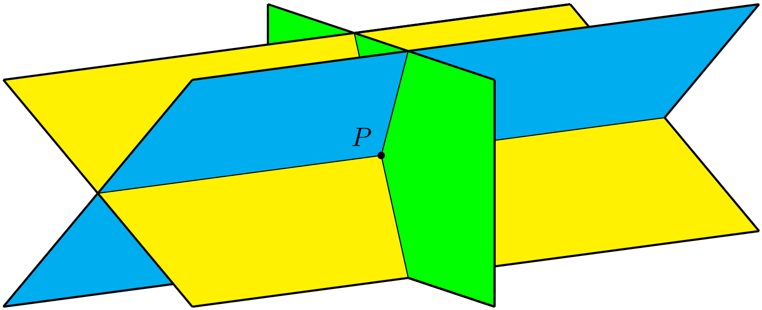
När vi löser ett ekvationssystem med tre variabler (och ett visst antal ekvationer), kan man se varje ekvation som ekvationen för ett plan skrivet på normalform. Vi kan därmed göra följande geometriska tolkningar av lösningen till ett sådant ekvationssystem:

1. Om systemet har entydig lösning, så har planen exakt en gemensam skärningspunkt
2. Om systemet saknar lösning, finns det ingen punkt som ligger i *samtliga* plan
3. Om systemet har oändligt många lösningar, kan lösningen antingen vara en-parametrig eller två-parametrig (d.v.s. man behöver antingen en eller två parametrar för att skriva ner lösningen till ekvationssystemet):
   - Om lösningen är en-parametrig, så kan man tolka den geometriskt som en rät linje. De olika planen i ekvationssystemet skär varandra längs med denna räta linje, och lösningen, skriven på parameterform, ger en ekvation på parameterform för linjen.
   - Om lösningen är två-parametrig, kan den tolkas som ekvationen för ett plan skrivet på parameterform. Eftersom samtliga ekvationer i sig kan tolkas som plan, måste dessa plan vara identiska och lika med det plan som beskrivs av systemets lösning.

Om ett ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta x, y och z, har en entydigt bestämd lösning

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \\ z = z_0, \end{cases}$$

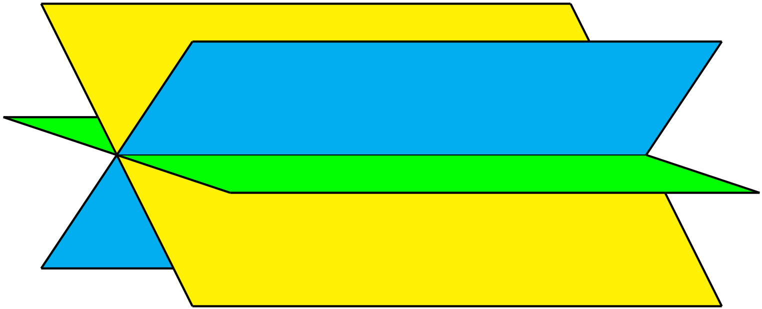
så skär de tre plan, som svarar mot var och en av ekvationerna, varandra i en enda punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$.



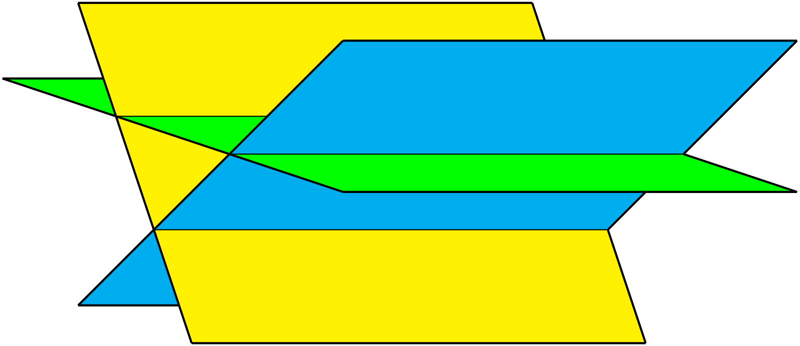
Om det finns oändligt många lösningar till ekvationssystemet, och om lösningen är en-parametrig, så kan den skrivas på formen

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t, \end{cases}$$

vilket vi kan se som ekvationen för en rät linje på parameterform. De tre planen skär varandra längs med denna linje.



Om slutligen lösningen saknas, finns det inga punkter som är gemensamma för alla tre planen.
Ett troligt utseende på planen är då att de skär varandra två och två som i nedanstående figur.



Men det kan också vara så att

- Två av planen är parallella medan det tredje skär vart och ett av dessa plan längs med en rät linje
- Alla tre planen är parallella.

Exempel

För att bestämma skärningen mellan de två planen

$$\Pi_1 : \begin{cases} x = 2 - \ 2t_1 + \ \ t_2 \\ y = 1 + \ 3t_1 - 3t_2 \\ z = \qquad -t_1 + 2t_2 \end{cases} \quad \text{och} \quad \Pi_2 : \begin{cases} x = -1 + \ \ t_1 - 3t_2 \\ y = \quad 4 + 3t_1 - 2t_2 \\ z = -2 - 2t_1 + 2t_2 \end{cases}$$

skriver vi först om båda ekvationerna till normalform. Vi får då (övning!) att Π_1 ges av

$$x + y + z - 3 = 0,$$

medan Π_2 kan tecknas som

$$2x + 4y + 7z = 0.$$

En punkt $P = (x, y, z)$ ligger alltså på skärningen mellan Π_1 och Π_2, om och endast om

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 4y + 7z = 0 \; \leftarrow_{-2} \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 3 \\ \phantom{x+{}} 2y + 5z = -6. \end{cases}$$

Sätt $z = 2t$. Då blir

$$2y + 5z = -6 \iff 2y = -6 - 5z = -6 - 10t \iff y = -3 - 5t,$$

vilket i sin tur ger

$$x = 3 - y - z = 3 - (-3 - 5t) - 2t = 6 + 3t.$$

Sammanfattningsvis ges skärningen mellan de två planen av

$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -3 - 5t \\ z = \phantom{-3 - {}} 2t, \end{cases}$$

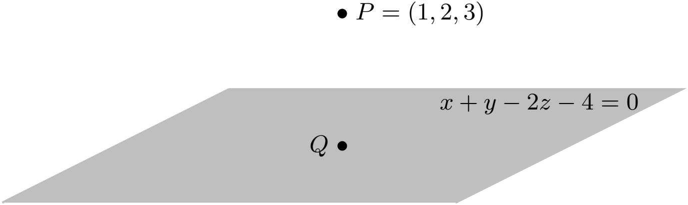
d.v.s. den räta linje som går genom punkten $P = (6, -3, 0)$ och har $\boldsymbol{v} = (3, -5, 2)$ som riktningsvektor.

Avstånd mellan punkt och plan

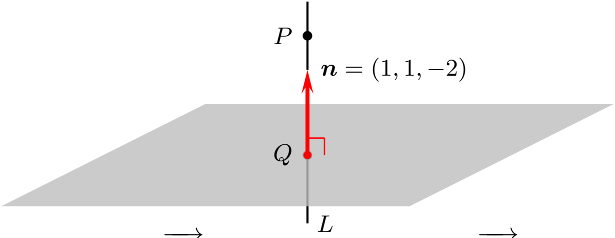
För att kunna bestämma (det kortaste) avståndet mellan en punkt och ett plan, är det en fördel om koordinatsystem är ortonormerat, vilket vi kommer att utgå från är fallet.

Exempel

För att bestämma avståndet mellan punkten $P = (1, 2, 3)$ och planet med ekvationen $x + y - 2z - 4 = 0$, ska vi finna den punkt Q i planet som är sådan att $|\overrightarrow{PQ}|$ blir minimal.



Eftersom koordinatsystemet är ortonormerat, och planets ekvation ges av $x + y - 2z - 4 = 0$, så ges en normalvektor till planet av $\boldsymbol{n} = (1, 1, -2)$. Därmed är $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$ ekvationen för den räta linje L som går genom $P = (1, 2, 3)$ och har $\boldsymbol{n}$ som riktningsvektor. Den punkt Q i planet som lägger närmast P kommer att vara skärningspunkten mellan L och planet. Vi vill beräkna $|\overrightarrow{PQ}|$.



Lägg märke till att $\overrightarrow{PQ}$ och $\boldsymbol{n}$ är parallella, så $\overrightarrow{PQ} = t\boldsymbol{n}$ för något t, vilket ger $|\overrightarrow{PQ}| = |t| \cdot |\boldsymbol{n}| = |t|\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = |t|\sqrt{6}$. Vi behöver alltså bestämma t.

För att finna t, utnyttjar vi att $Q = (x, y, z) = (1 + t, 2 + t, 3 - 2t)$ ligger i planet precis när dess koordinater uppfyller dess ekvation $x + y - 2z - 4 = 0$:

$$(1 + t) + (2 + t) - 2(3 - 2t) - 4 = 0 \iff t = \frac{7}{6}.$$

Vi får att det kortaste avståndet mellan planet och P blir

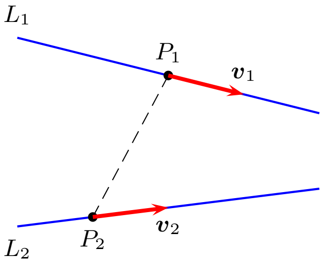
$$|\overrightarrow{PQ}| = |t|\sqrt{6} = \frac{7}{6} \cdot \sqrt{6} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Avstånd mellan räta linjer

Två icke-parallella räta linjer i rummet behöver ju inte ha en gemensam skärningspunkt; de kan mycket väl ”missa” varandra. En naturlig fråga i sammanhanget är hur pass två icke-skärande linjer kan komma varandra. För att kunna räkna ut detta, behöver vi utgå från det koordinatsystem som används är ortonormerat.

Vi kallar linjerna för L_1 och L_2. Låt P_1 vara en godtycklig punkt på L_1 och P_2 en godtycklig punkt på L_2. Vi undrar över när $\overrightarrow{P_1P_2}$ är som kortast.

- För att P_1 ska ligga så nära L_2 som möjligt, krävs det att $\overrightarrow{P_1P_2}$ är ortogonal mot L_2:s riktningsvektor $\boldsymbol{v}_2$.
- Samtidigt måste P_2 ligga så nära L_1 som möjligt, d.v.s. $\overrightarrow{P_1P_2}$ ska också vara ortogonal mot L_1:s riktningsvektor $\boldsymbol{v}_1$.



Detta leder till att $\boldsymbol{v}_1 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \boldsymbol{v}_2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = 0$, med vars hjälp $\overrightarrow{P_1P_2}$, och därmed också dess längd, kan bestämmas.

Exempel

Vi ska bestämma det kortaste avståndet mellan linjerna

$$L_1\colon \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad \text{och} \quad L_2\colon \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + t. \end{cases}$$

Välj $P_1 = (1, 2+t, 3+t)$ på L_1 och $P_2 = (1+2s, 1+3s, 1+s)$ på L_2. Då blir $\overrightarrow{P_1P_2} = (2s, 3s-t-1, s-t-2)$, som vi vill vi ska vara ortogonal mot linjernas riktningsvektorer $\boldsymbol{v}_1 = (0,1,1)$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = (2,3,1)$, d.v.s. vi vill att

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} &= 0 \cdot 2s + 1 \cdot (3s - t - 1) + 1 \cdot (s - t - 2) \\ &= 4s - 2t - 3 = 0 \\ \boldsymbol{v}_2 \cdot \overrightarrow{P_1P_2} &= 2 \cdot 2s + 3 \cdot (3s - t - 1) + 1 \cdot (s - t - 2) \\ &= 14s - 4t - 5 = 0. \end{aligned}$$

Vi får ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4s - 2t = 3 \\ 14s - 4t = 5 \end{cases}$$

som visar sig ha lösningen

$$\begin{cases} s = -1/6 \\ t = -11/6. \end{cases}$$

För dessa värden på s och t blir

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2s, 3s - t - 1, s - t - 2) = (-1/3, 1/3, -1/3) = \frac{1}{3}(-1, 1, -1).$$

Längden av denna vektor är

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{1}{3}\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Det kortaste avståndet mellan L_1 och L_2 är alltså $1/\sqrt{3}$ längdenheter.