

Formelsamling i Vektorgeometri

Basbyte Låt $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ och $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara två olika baser för rummets vektorer. Antag att $\mathbf{u}$ har koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ och koordinaterna (y_1, y_2, y_3) i basen $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$. Då ges sambandet mellan $\mathbf{u}$'s koordinaterna i de olika baserna av

$$X = TY,$$

där X och Y är kolonnmatriser vars element utgörs av koordinaterna för $\mathbf{u}$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ respektive $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$, och där T är den så kallade *transformationsmatrisen*, vars kolonner består av koordinaterna för $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2$ och $\mathbf{f}_3$ i basen $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

Skalärprodukt Med *skalärprodukten* av två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ avses talet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha,$$

där α är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, förutsatt att ingen av vektorerna $\mathbf{u}$ eller $\mathbf{v}$ är nollvektorn. Om någon av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är nollvektorn sätter vi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ har sina koordinater givna i en ON-bas, så är

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Längden av en vektor $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ ges av

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

om dess koordinater är givna i en ON-bas.

Vektorprodukt Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara två icke-parallella vektorer i rummet. Då definieras *vektorprodukten* av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ som den vektor $\mathbf{w}$ som är sådan att

- (i) $\mathbf{w}$ är ortogonal mot såväl $\mathbf{u}$ som $\mathbf{v}$
- (ii) längden av $\mathbf{w}$ är lika med arean av den parallelogram som spänns upp av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$
- (iii) systemet $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ är positivt orienterat.

Att $\mathbf{w}$ är vektorprodukten av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ betecknas som $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är parallella (eller om någon av dem är nollvektorn), sätter vi $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Om $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3)$ och $\mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3)$ i en positivt orienterad ON-bas, så är

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Planets ekvation I ett ortonormerat koordinatsystem har planet med normalvektorn (A, B, C) ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$, där D är en konstant. Omvänt gäller att planet med ekvationen $Ax + By + Cz + D = 0$ i ett ortonormerat koordinatsystem har (A, B, C) som normalvektor.

Linjär avbildning Om den linjära avbildningen F av rummet representeras av matrisen A i en given bas $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, så ges kolonnerna i A av koordinaterna för bilderna $F(\mathbf{e}_1)$, $F(\mathbf{e}_2)$ och $F(\mathbf{e}_3)$ av basvektorerna.

Linjär avbildning, basbyte Låt $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ och $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ vara baser för rummets vektorer. Antag att F är en linjär avbildning av rummet som i baserna $\mathbf{e}$ och $\mathbf{f}$ har avbildningsmatriserna A respektive B . Om T är transformationsmatrisen för basbytet från bas $\mathbf{e}$ till bas $\mathbf{f}$, så ges sambandet mellan motsvarande avbildningsmatriser till F av

$$B = T^{-1}AT.$$